CINEMATIQUE (Révision)

EXERCICE :

Le système à étudier représente un système de préhension qui permet de saisir un objet et de le déplacer (voir **figure 1 page 2**). Le système est constitué :

- D'un bâti fixe (0), repère lié $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

- D'une colonne (1), repère lié $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$, en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti (0).
  On note : $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$

- D'un bras (2), repère lié $R_2(A,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$, en liaison pivot parfaite d'axe $(A,\vec{x}_1)$ avec la colonne (1). On note $\theta=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{z}_0,\vec{z}_2)$ et $\overrightarrow{OA}=a\,\vec{y}_1+h\,\vec{z}_0$ (a et h constantes) .
  (2) est aussi en liaison pivot parfaite d'axe $(B,\vec{x}_1)$ avec le bras (3).

- D'un bras (3), repère lié $R_3(B,\vec{x}_1,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$, de centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3}=-b\,\vec{z}_3$ (b constante) .

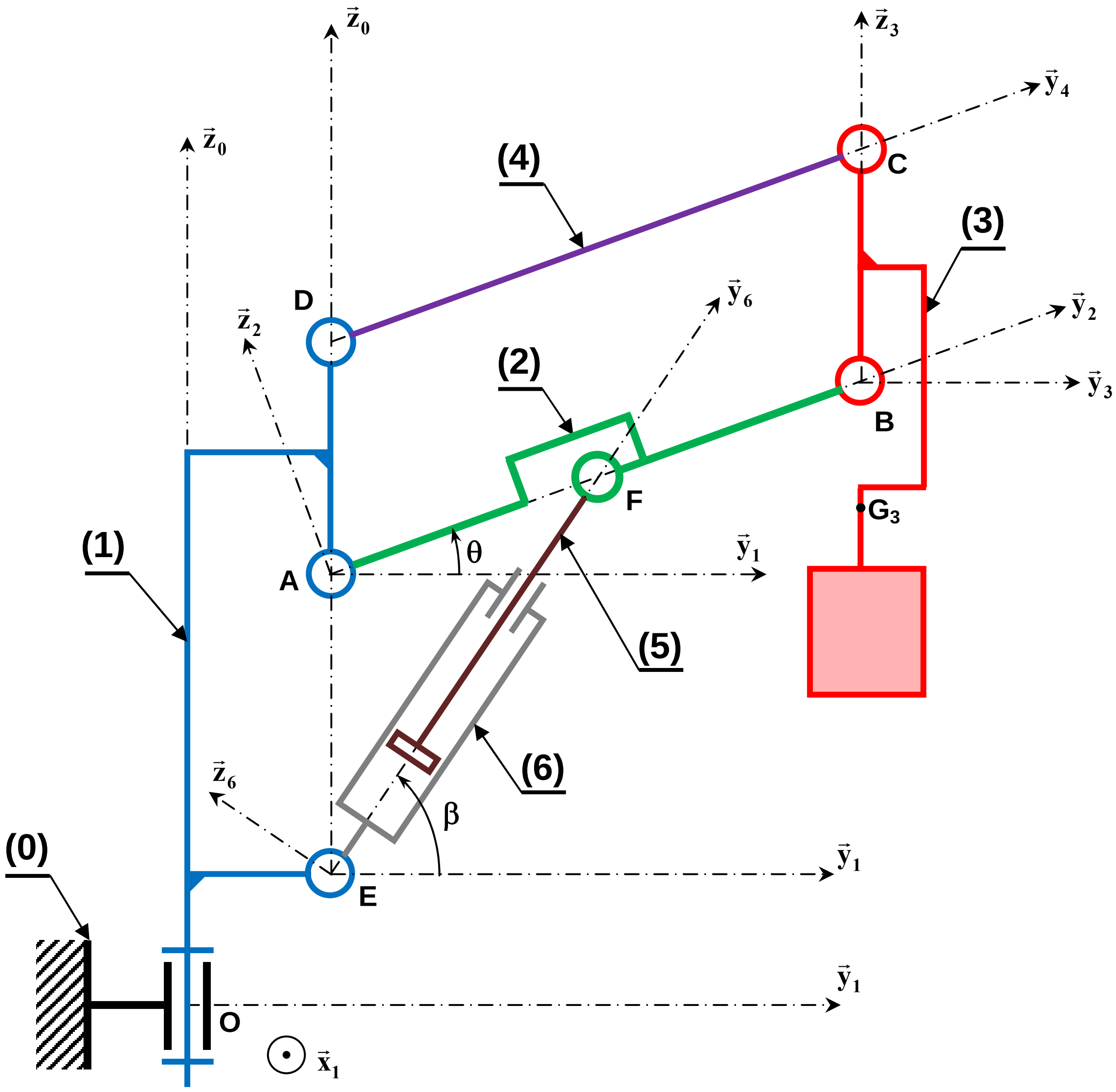
- D'une barre (4) repère lié $R_4(D,\vec{x}_1,\vec{y}_4,\vec{z}_4)$.
  La barre (4) est liée à la colonne (1) par une liaison pivot d'axe $(D,\vec{x}_1)$ et au bras (3) par une liaison pivot d'axe $(C,\vec{x}_1)$.

- D'un vérin qui assure la rotation de (2) par rapport à (1), ce vérin est constitué de la tige (5) et du corps (6) avec L(5/6) = liaison pivot glissant d'axe $(E,\vec{y}_6)$.
  On a aussi L(6/1) = liaison pivot $(E,\vec{x}_1)$ et L(5/2) = pivot d'axe $(F,\vec{x}_1)$.
  On note $R_6(E,\vec{x}_1,\vec{y}_6,\vec{z}_6)$ le repère lié au corps (6), $\beta=(\vec{y}_1,\vec{y}_6)=(\vec{z}_0,\vec{z}_6)$,
  $\overrightarrow{AF}=\frac{l_2}{2}\vec{y}_2$, $\overrightarrow{AE}=-e\,\vec{z}_0$ (e et l_2 constantes).

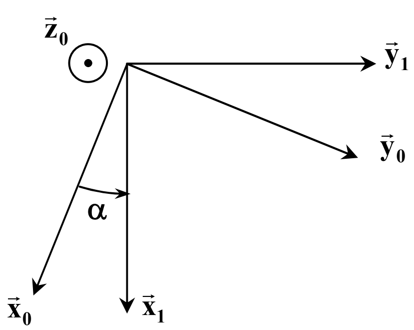
A noter qu'on a AB = DC = l_2 et AD = BC = l_1 (l_1 et l_2 constantes).

Questions :

1) Donner le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(2/1)\}$ au point A, En déduire $\{\mathcal{V}(2/1)\}$ au point F.
2) Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(1/0)\}$ au point F, En déduire $\{\mathcal{V}(2/0)\}$ au point F.
3) En notant $\overrightarrow{EF}=\lambda(t)\,\vec{y}_6$, exprimer dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_6,\vec{z}_6)$ les vecteurs vitesses $\vec{V}(F\in 5/6)$ et $\vec{V}(F\in 6/1)$.
4) En exprimant la fermeture cinématique au point F ($\vec{V}(F\in 2/2)=\vec{0}$) écrire les deux équations différentielles liant λ , $\dot{\lambda}$, θ , $\dot{\theta}$, β , $\dot{\beta}$ et l_2.
5) Quelle est la nature du mouvement de (3) par rapport à (1) ? Justifier.
6) En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}(3/1)$.
7) Quelles sont les trajectoires :
   - du point B du solide (3) dans (1) ;
   - du point G_3 du solide (3) dans (1).
8) Déterminer les torseurs cinématiques :
   $\{\mathcal{V}(3/1)\}$ au point B , $\{\mathcal{V}(3/1)\}$ au point G_3, $\{\mathcal{V}(3/2)\}$ au point A, $\{\mathcal{V}(2/5)\}$ au point F.
9) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(G_3\in 3/0)$.



$\vec{z}_0$
$\vec{z}_3$
$\vec{y}_4$
$\vec{z}_0$
(4)
C
(3)
D
$\vec{y}_6$
$\vec{z}_2$
$\vec{y}_2$
(2)
$\vec{y}_3$
B
F
G_3
(1)
θ
$\vec{y}_1$
A
(5)
(6)
$\vec{z}_6$
β
(0)
$\vec{y}_1$
E
$\vec{y}_1$
O
$\vec{x}_1$



$\vec{z}_0$
$\vec{y}_1$
$\vec{y}_0$
α
$\vec{x}_0$
$\vec{x}_1$

Figure 1

STATIQUE (Révision)

EXERCICE : La **figure 2 ci-dessous** représente la modélisation cinématique d'une ponceuse vibrante électroportative. L'arbre d'entrée **(2)** est entraîné en rotation continue par un moteur (non représenté) ; cette rotation continue est ensuite transformée par l'intermédiaire de la noix **(3)** en un mouvement de rotation alternative du patin **(4)**.

On note : : $\overrightarrow{NB} = \mu\,\vec{z}_1$; $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\vec{x}_1$; $\overrightarrow{AB} = r_2\,\vec{z}_2$; $\overrightarrow{NC} = d_1\,\vec{x}_4$; $\overrightarrow{CI} = -h_1\,\vec{z}_1$;

$\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$; $\theta_4 = (\vec{x}_1, \vec{x}_4) = (\vec{y}_1, \vec{y}_4)$;

L'action mécanique du moteur sur l'arbre **(2)** est modélisée par un torseur couple de moment $\vec{C}_m = C_m\,\vec{x}_1$.

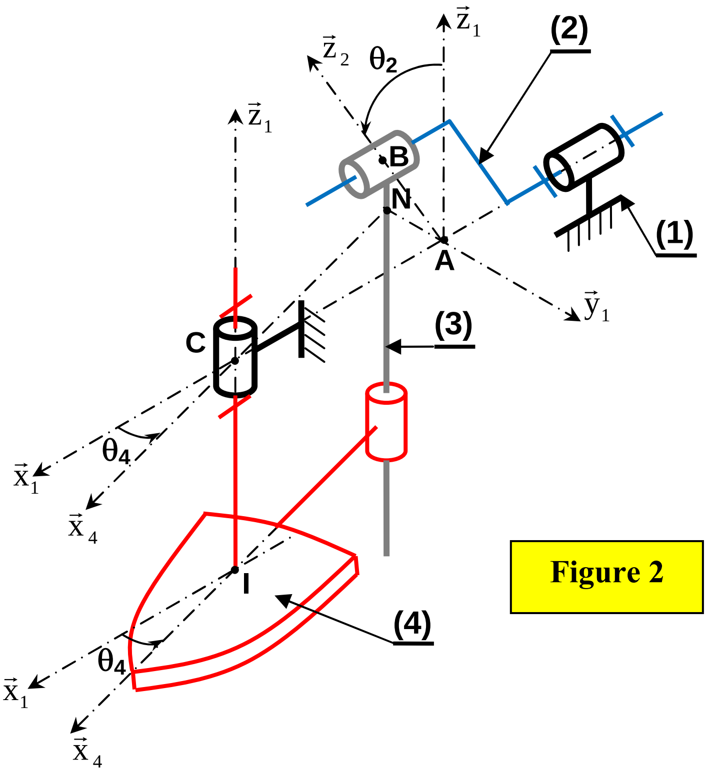
L'action mécanique de la pièce à poncer sur le patin **(4)** est modélisée par :

$$\{\tau(\text{ponçage}\to 4)\} = \begin{Bmatrix} F_x\,\vec{x}_1 + F_y\,\vec{y}_1 + F_z\,\vec{z}_1 \\ M_x\,\vec{x}_1 + M_y\,\vec{y}_1 + M_z\,\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_C$$

On suppose que le mécanisme est en équilibre, toutes les liaisons sont parfaites et Le poids des pièces est négligeable.

Les torseurs d'actions mécaniques des liaisons en un point M seront notés : $\{\tau\,(i\to j)\} = {}_M\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

.



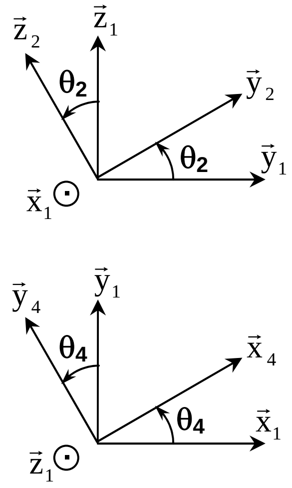
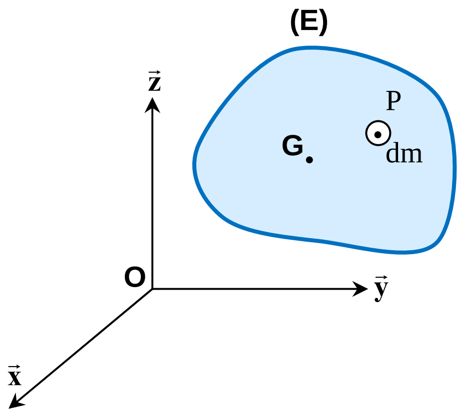


Figure 2

1. Tracer le graphe d'analyse des actions mécaniques.
2. Déterminer, en projection sur $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$ et $\vec{z}_1$, les trois équations scalaires issues de la fermeture géométrique..
3. Ecrire , dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, la forme des torseurs d'action mécaniques de liaisons suivants :
   $\{\tau\,(4\to 3)\}$ au point B ; $\{\tau\,(2\to 3)\}$ au point B ; $\{\tau\,(1\to 2)\}$ au point A ; $\{\tau\,(1\to 4)\}$ au point C .
4. Déterminer l'équation scalaire issue du théorème du moment statique au point A appliqué à **(2)** en projection sur $\vec{x}_1$.
5. Déterminer les trois équations scalaires issues du théorème de la résultante statique appliquée à **(3)** en projection sur $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
6. Isoler (4), puis en vous aidant des résultats des questions précédentes, déterminer l'unique équation scalaire issue du PFS pour déterminer M_z en fonction de C_m, d_1, r_2 , θ_2 et θ_4.
7. Montrer alors que : $M_z = -C_m \dfrac{d_1 \cos\theta_4}{r_2 \cos\theta_2}$.

CINETIQUE (Cours)



I- CENTRE D'INERTIE : (voir cours de statique)

Le centre d'inertie d'un ensemble matériel (E) de masse m est le point G tel que :

$$\boxed{m\overrightarrow{OG} = \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\ dm}$$

- Le centre d'inertie G de (E) vérifie aussi : $\displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{GP}\ dm = \vec{0}$;
- Si (E) est une partition de n sous ensembles matériels :
  $E = \bigcup_{i=1}^{i=n} E_i$ tel que chaque E_i est de masse m_i et de centre d'inertie G_i

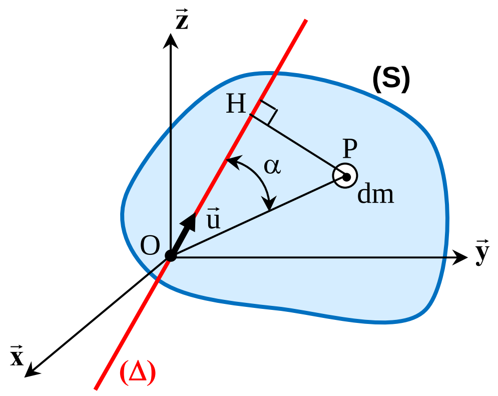
  Alors : $\displaystyle m\overrightarrow{OG} = \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\ dm = \int_{P\in E_1\cup E_2\cup E_3 ...} \overrightarrow{OP}\ dm = \sum_{i=1}^{n}\int_{P\in Ei} \overrightarrow{OP}\ dm$

  Donc $\boxed{m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OG_i}}$ **avec** $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ (m : masse de l'ensemble matériel (E)) ;
- Si (E) admet un élément de symétrie matérielle (plan , axe , centre) alors son centre d'inertie G appartient à cet élément de symétrie.

II- OPERATEUR D'INERTIE – MATRICE D'INERTIE :

2.1. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe :

. Soit (S) un solide ;
. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère ;
. Soit $\Delta(O,\vec{u})$ un axe d'origine O (origine du repère R) et de vecteur unitaire $\vec{u}$.
. Soit P un point courant de (S) de masse élémentaire dm.



Par définition le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) est le scalaire positif :

$$I_\Delta = I_{(O,\vec{u})} = \int_{P\in S} \left\|\overrightarrow{HP}\right\|^2 dm$$

On a : $\left\|\overrightarrow{HP}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| |\sin\alpha|$ or $\vec{u}$ est un vecteur unitaire donc $\|\vec{u}\| = 1$

Alors $\left\|\overrightarrow{HP}\right\| = \|\vec{u}\|\left\|\overrightarrow{OP}\right\||\sin\alpha| = \left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{HP}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right\|^2 = \underbrace{\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)}_{\vec{A}}\cdot\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)$

$$\left\|\overrightarrow{HP}\right\|^2 = \vec{u}.\left(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{A}\right) = \vec{u}.\left[\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)\right]$$

Donc $\displaystyle I_\Delta = \int_{P\in S} \vec{u}.\left[\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)\right]dm$

Comme $\vec{u}$ est indépendant de m alors $\displaystyle I_\Delta = \vec{u}.\int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm$

D'où $\boxed{I_\Delta = I_{(O,\vec{u})} = \vec{u}.\vec{J}_O(S,\vec{u})}$ **(à retenir)**

2.2. Opérateur d'inertie d'un solide :

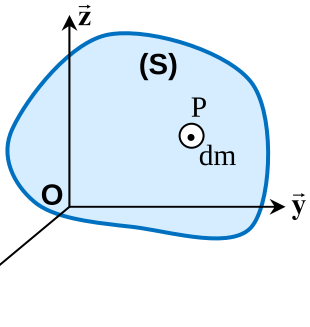
L'opérateur d'inertie d'un solide (S) **en un point O** est **l'opérateur linéaire** qui à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur : $\boxed{\vec{J}_O(S,\vec{u}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm}$

$$\left(\vec{u} \xrightarrow{J_O} \vec{J}_O(S,\vec{u}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm\right)$$

2.3. Matrice d'inertie d'un solide :

L'opérateur d'inertie est linéaire donc on peut lui associer une matrice : $\boxed{\vec{J}_O(S,\vec{u})=[I_O(S)]\vec{u}}$ **(à retenir)**

Cherchons la matrice d'inertie $[I_O(S)]$.



On a :
$$\begin{array}{c} \quad\ \vec{J}_O(S,\vec{x}) \quad \vec{J}_O(S,\vec{y}) \quad \vec{J}_O(S,\vec{z}) \\ [I_O(S)] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \end{array}$$

Soit P un point courant de (S) de masse élémentaire dm , soit $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$.

On a $\vec{J}_O(S,\vec{x}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{x}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm$

$$\vec{x}\wedge\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{x}\wedge\overrightarrow{OP}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix}y^2+z^2\\-xy\\-xz\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Donc
$$\vec{J}_O(S,\vec{x}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{x}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm = \left(\int_{P\in S}(y^2+z^2)dm\right)\vec{x} - \left(\int_{P\in S}xy\,dm\right)\vec{y} - \left(\int_{P\in S}xz\,dm\right)\vec{z}$$

De même :
$$\vec{J}_O(S,\vec{y}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{y}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm = -\left(\int_{P\in S}xy\,dm\right)\vec{x} + \left(\int_{P\in S}(x^2+z^2)dm\right)\vec{y} - \left(\int_{P\in S}yz\,dm\right)\vec{z}$$

$$\vec{J}_O(S,\vec{z}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{z}\wedge\overrightarrow{OP}\right)dm = -\left(\int_{P\in S}xz\,dm\right)\vec{x} - \left(\int_{P\in S}yz\,dm\right)\vec{y} + \left(\int_{P\in S}(x^2+y^2)dm\right)\vec{z}$$

D'ou
$$\boxed{[I_O(S)] = \begin{pmatrix} \int_{P\in S}\left(y^2+z^2\right)dm & -\int_{P\in S}xy\,dm & -\int_{P\in S}xz\,dm \\ -\int_{P\in S}xy\,dm & \int_{P\in S}\left(x^2+z^2\right)dm & -\int_{P\in S}yz\,dm \\ -\int_{P\in S}xz\,dm & -\int_{P\in S}yz\,dm & \int_{P\in S}\left(x^2+y^2\right)dm \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

$[I_O(S)]$ <u>est la matrice d'inertie du solide (S) au point O, exprimée dans la base</u> $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$,

$[I_O(S)]$ est associée à l'opérateur d'inertie $\vec{J}_O(S,\vec{u})$: $\boxed{\vec{J}_O(S,\vec{u})=[I_O(S)]\vec{u}}$ **On note :**

$$\begin{array}{c} \quad\ \vec{J}_O(S,\vec{x}) \ \ \vec{J}_O(S,\vec{y}) \ \ \vec{J}_O(S,\vec{z}) \\ [I_O(S)] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \end{array}$$

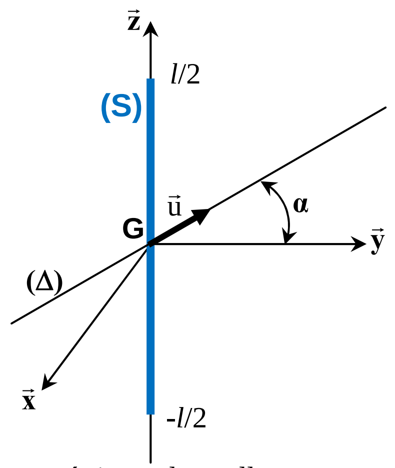
* $A = I_{Ox} = \int_{P\in S} (y^2 + z^2)\,dm$: moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$ $(A = \vec{x}.\vec{J}_O(S,\vec{x}))$;
* $B = I_{Oy} = \int_{P\in S} (x^2 + z^2)\,dm$: moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{y})$;
* $C = I_{Oz} = \int_{P\in S} (x^2 + y^2)\,dm$: moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$;
* $F = I_{Oxy} = \int_{P\in S} xy\,dm$: produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(O,\vec{x})$ et $(O,\vec{y})$

  $(F = -\vec{x}.\vec{J}_O(S,\vec{y}) = -\vec{y}.\vec{J}_O(S,\vec{x}))$
* $E = I_{Oxz} = \int_{P\in S} xz\,dm$: produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(O,\vec{x})$ et $(O,\vec{z})$;
* $D = I_{Oyz} = \int_{P\in S} yz\,dm$: produit d'inertie de (S) par rapport aux axes $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$.

2.4. Application :

(S) : tige rectiligne ,homogène , de masse m , de longueur l , de diamètre négligeable et de centre d'inertie G ;
$R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à (S).

1) Déterminer en fonction de m et l la matrice d'inertie de (S) au point G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
2) Déterminer le moment d'inertie de la tige (S) par rapport à l'axe $\Delta(G,\vec{u})$ tel que le vecteur unitaire $\vec{u}$ est situé dans le plan $(G, \vec{y}, \vec{z})$ et $\alpha = (\vec{y}, \vec{u})$



2.5. Base principale d'inertie :

La matrice d'inertie $[I_O(S)]$ est à coefficients réels et elle est symétrique, donc elle est diagonalisable. Il existe donc une base de vecteurs propres $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ dans laquelle on a :

$$[I_O(S)] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

* $(O,\vec{x}_1)$, $(O,\vec{y}_1)$ et $(O,\vec{z}_1)$ sont les **axes principaux d'inertie** de (S) au point O

  $(\vec{J}_O(S,\vec{x}_1) = A_1\vec{x}_1)$;
* A_1 , B_1 et C_1 sont les **moments d'inertie principaux** de (S) au point O .

2.6. Symétrie matérielle d'un solide :

On a la symétrie matérielle si on a à la fois la symétrie géométrique et la symétrie de répartition de masse.

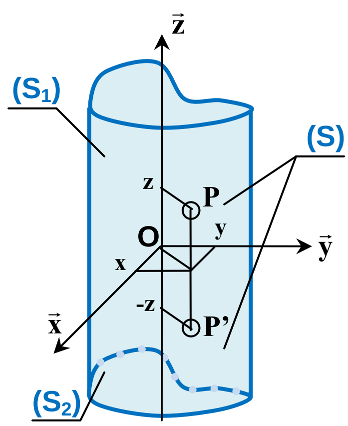
a) Solide (S) ayant $(O,\vec{x},\vec{y})$ comme plan de symétrie matérielle :

A tout point P(x , y , z) de masse dm correspond son symétrique P'(x , y , –z) de masse dm également .

On a : $D = I_{Oyz} = \int_{P\in S} yz\,dm$

Soit $S = S_1 \cup S_2$ avec S_1 la partie de S située au dessus du plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ et S_2 la partie située au dessous .

Alors $D = I_{Oyz} = \int_{P\in S} yz\,dm = \int_{P\in S_1\cup S_2} yz\,dm = \int_{P\in S_1} yz\,dm + \int_{P\in S_2} yz\,dm$



$$= \int_{P\in S_1} yz\,dm + \int_{P\in S_1} y(-z)\,dm = 0$$

Donc D=0 et de même on montre que $E = I_{Oxz} = \int_{P\in S} xz\,dm = 0$;

D'où : $[I_0(S)] = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$; **$(O,\vec{z})$ <u>est un axe principal d'inertie de (S)</u>** .

b) <u>Solide (S) ayant $(O,\vec{x},\vec{z})$ et $(O,\vec{y},\vec{z})$ comme plans de symétrie matérielle :</u>

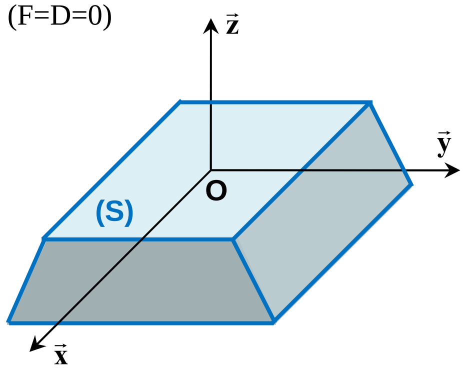
. $(O,\vec{x},\vec{z})$ plan de symétrie matérielle donc $\int_{P\in S} xy\,dm = \int_{P\in S} yz\,dm = 0$ (F=D=0)

. $(O,\vec{y},\vec{z})$ plan de symétrie matérielle donc :

$$\int_{P\in S} xy\,dm = \int_{P\in S} xz\,dm = 0 \quad (F=E=0)$$

D'où $[I_0(S)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$;

$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ <u>est une base principale d'inertie de (S)</u>



<u>Remarque :</u> il suffit que le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ présente deux plans de symétrie matérielle pour (S) pour que sa matrice d'inertie au point O soit diagonale dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

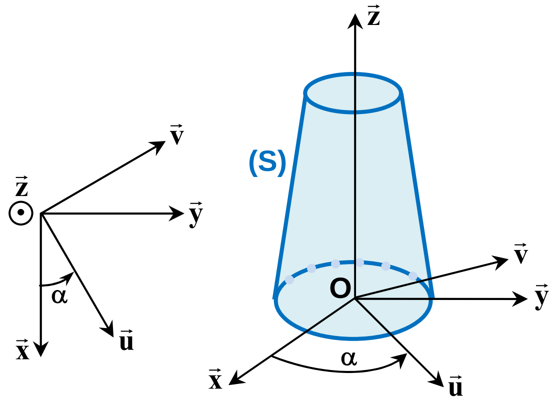
c) <u>Solide (S) ayant $(O,\vec{z})$ comme axe de symétrie matérielle de révolution :</u>

Tout plan contenant l'axe $(O,\vec{z})$ est un plan de symétrie matérielle de (S) donc :

$$[I_0(S)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ ou $(\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ $\forall\alpha$

dans toute base orthonormée dont le 3eme vecteur unitaire est $\vec{z}$

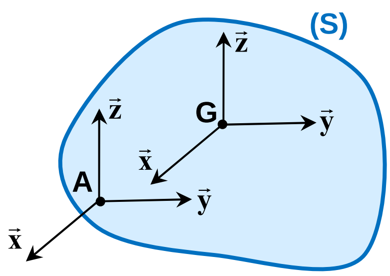


2.7. Théorème de Huygens généralisé :

. Soit (S) un solide de masse **m** et de centre d'inertie **G**.

. Soit A un point.

. Le théorème de Huygens permet de mettre en relation les matrices d'inertie de (S) aux points **A** et **G** : **$[I_A(S)]$** et **$[I_G(S)]$** exprimées dans la **même base** $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.



Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire quelconque.

On a : $\vec{J}_A(S,\vec{u}) = \int_{P\in S} \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}} \wedge (\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})\,dm$

$$\vec{J}_A(S,\vec{u}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})\,dm + \int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})\,dm$$

$$= \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\,dm) + \int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})\,dm$$

Or $\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\,dm = m\overrightarrow{AG}$ (G est le centre d'inertie de (S))

Donc $\vec{J}_A(S,\vec{u}) = m\overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}) + \int_{P\in S}\overrightarrow{GP}\wedge(\vec{u}\wedge \underbrace{\overrightarrow{AP}}_{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}})\,dm$

$$\vec{J}_A(S,\vec{u}) = m\overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}) + \underbrace{\int_{P\in S}\overrightarrow{GP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})\,dm}_{(\int_{P\in S}\overrightarrow{GP}\,dm)\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})} + \underbrace{\int_{P\in S}\overrightarrow{GP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GP})\,dm}_{\vec{J}_G(S,\vec{u})}$$

Or $\int_{P\in S}\overrightarrow{GP}\,dm = \vec{0}$ (G est le centre d'inertie de (S))

Donc $$\boxed{\vec{J}_A(S,\vec{u}) = \vec{J}_G(S,\vec{u}) + m\overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})}$$

Soit sous forme matricielle : $[I_A(S)]\vec{u}=[I_G(S)]\vec{u}+[I_A(m,G)]\vec{u}$ et comme $\vec{u}$ est quelconque alors :

$$\boxed{[I_A(S)]=[I_G(S)]+[I_A(m,G)]}$$ **(Th de Huygens généralisé)**

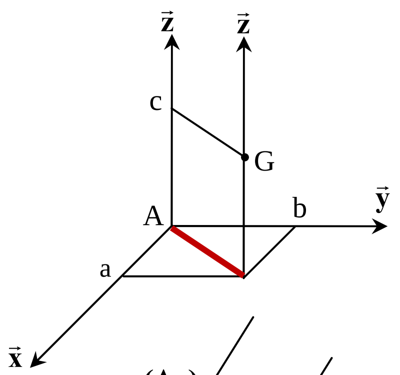
Soit $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}_{[I_A(S)]} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}_{[I_G(S)]} + \underbrace{\begin{pmatrix} m(b^2+c^2) & -mab & -mac \\ -mab & m(a^2+c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & m(a^2+b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}_{[I_A(m,G)]}$$

$[I_A(m,G)]$ représente la matrice d'inertie de (S) au point A en supposant sa masse concentrée en G

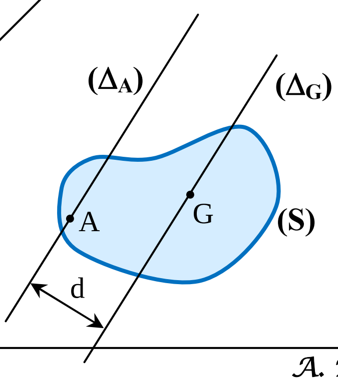
$$\boxed{\begin{array}{ll} A = A_G + m(b^2+c^2) & D = D_G + mbc \\ B = B_G + m(a^2+c^2) & E = E_G + mac \\ C = C_G + m(a^2+b^2) & F = F_G + mab \end{array}}$$

Remarques :



1. On a $C = C_G + m(a^2+b^2)$
$I_{Az} = I_{Gz} + m(a^2+b^2)$

a^2+b^2 représente le carré de la distance entre les axes $(A,\vec{z})$ et $(G,\vec{z})$



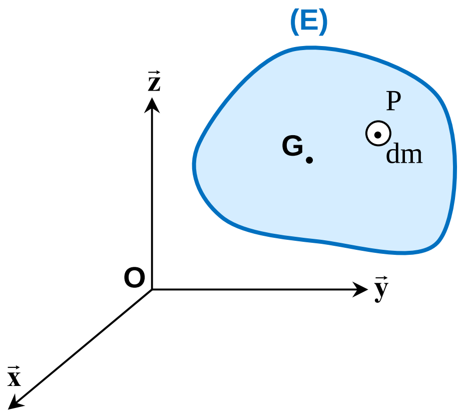
2. Soit Δ_G un axe passant par le centre d'inertie G de (S) et Δ_A un axe passant par le point A tel que $\Delta_A // \Delta_G$ alors on a de même :

$$\boxed{I_{\Delta_A} = I_{\Delta_G} + md^2}$$ **(Th de Huygens)**

Avec d = distance (Δ_A, Δ_G)
m : masse du solide (S) .

III- TORSEUR CINETIQUE :

- Soit (E) un ensemble matériel de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.



* **Définition : Le torseur cinétique** de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement rapport au repère R , en un point A **quelconque** est :

$$\{\mathcal{C}(E/R)\} = \left\{\begin{matrix} \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm \\ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_C(E/R) \\ \vec{\sigma}_A(E/R) \end{matrix}\right\}_A$$

- $\vec{R}_c(E/R) = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm$: est la résultante cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R.

- $\vec{\sigma}_A(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm$: est le moment cinétique au point A de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R.

* **Expression de $\vec{R}_c(E/R)$:**

G étant le centre d'inertie de (E) donc $m\overrightarrow{OG} = \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,dm$

En dérivant par rapport à t dans R $m\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,dm\right]_R$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,dm\right]_R = \int_{P\in E} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R dm$$ (valable pour un ensemble matériel (E) a masse conservative)

Donc $m\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R = \int_{P\in E} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R dm$

D'où $m\vec{V}(G/R) = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm$

$$\boxed{\vec{R}_c(E/R) = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm = m\vec{V}(G/R)}$$

Donc
$$\boxed{\{\mathcal{C}(E/R)\} = \left\{\begin{matrix} m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}_A(E/R) \end{matrix}\right\}_A}$$

*** Remarques :**

- Le torseur cinétique est aussi appelé torseur des quantités de mouvement ;
- $\{\mathcal{C}(E/R)\}$ est un torseur donc : $\boxed{\vec{\sigma}_A(E/R) = \vec{\sigma}_B(E/R) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{V}(G/R)}$

  ($\forall$ A et B deux points de l'espace)
- Si la masse de (E) est supposée concentrée en son centre d'inertie G alors :

$$\{\mathcal{C}(E/R)\} = \left\{\begin{matrix} m\vec{V}(G/R) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} m\vec{V}(G/R) \\ \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}(G/R) \end{matrix}\right\}_A$$

- Si (E) se réduit à une masse ponctuelle P alors :

$$\{\mathcal{C}(P/R)\} = \left\{\begin{matrix} m\vec{V}(P/R) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_P = \left\{\begin{matrix} m\vec{V}(P/R) \\ \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{V}(P/R) \end{matrix}\right\}_A$$

IV- TORSEUR DYNAMIQUE :

*** Définition : Le torseur dynamique** de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement rapport au repère R , en un point A **quelconque** est :

$$\{\mathcal{D}(E/R)\} = \left\{\begin{matrix} \int_{P\in E} \vec{\gamma}(P/R)\,dm \\ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/R)\,dm \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_d(E/R) \\ \vec{\delta}_A(E/R) \end{matrix}\right\}_A$$

. $\vec{R}_d(E/R) = \int_{P\in E} \vec{\gamma}(P/R)\,dm$: est la résultante dynamique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R.

. $\vec{\delta}_A(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/R)\,dm$: est le moment dynamique au point A de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R.

*** Expression de $\vec{R}_d(E/R)$:**

On a $m\vec{V}(G/R) = \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm$

En dérivant par rapport à t dans R $m\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R)\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm\right]_R$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm\right]_R = \int_{P\in E} \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_R dm$$

Donc $m\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R)\right]_R = \int_{P\in E} \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_R dm$

D'où $m\vec{\gamma}(G/R) = \int_{P\in E} \vec{\gamma}(P/R)\,dm$

$$\boxed{\vec{R}_d(E/R) = \int_{P\in E} \vec{\gamma}(P/R)\,dm = m\vec{\gamma}(G/R)}$$

Donc $\boxed{\{\mathcal{D}(E/R)\} = \left\{\begin{matrix} m\vec{\gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_A(E/R) \end{matrix}\right\}_A}$

* **Remarques :**

- Le torseur dynamique est aussi appelé torseur des quantités d'accélération ;
- $\{\mathcal{D}(E/R)\}$ est un torseur donc : $\boxed{\vec{\delta}_A(E/R) = \vec{\delta}_B(E/R) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{\gamma}(G/R)}$
  (∀ A et B deux points de l'espace)
- Si la masse de (E) est supposée concentrée en son centre d'inertie G alors :

$$\{\mathcal{D}(E/R)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/R) \\ \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}(G/R) \end{Bmatrix}_A$$

- Si (E) se réduit à une masse ponctuelle P alors :

$$\{\mathcal{D}(P/R)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(P/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(P/R) \\ \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{\gamma}(P/R) \end{Bmatrix}_A$$

V- RELATION ENTRE LE MOMENT CINETIQUE ET LE MOMENT DYNAMIQUE :

On a $\vec{\sigma}_A(E/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\,dm$, en dérivant par rapport à t dans R :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\,dm\right]_R$$

$$= \int_{P\in E} \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)\right)\right]_R dm$$

$$= \int_{P\in E} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AP}\right]_R \wedge \vec{V}(P/R)\,dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R)\right]_R dm$$

$$= \int_{P\in E} \left(\vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R)\right) \wedge \vec{V}(P/R)\,dm + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/R)\,dm$$

$$= -\vec{V}(A/R) \wedge \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm + \vec{\delta}_A(E/R)$$

Or $\int_{P\in E} \vec{V}(P/R)\,dm = m\vec{V}(G/R)$

D'où

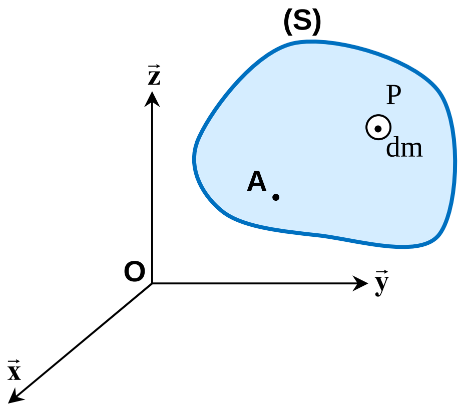
$$\boxed{\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R + \vec{V}(A/R) \wedge m\vec{V}(G/R)}$$

(A est un point quelconque de l'espace)

* **Cas particuliers :**

- Le point A est fixe dans R : $\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R$
- Le point A est confondu avec G (A ≡ G) : $\boxed{\vec{\delta}_G(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G(E/R)\right]_R}$
- $\vec{V}(A/R) \,//\, \vec{V}(G/R)$: $\vec{\delta}_A(E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R$

VI- MOMENT CINETIQUE D’UN SOLIDE :



- Soit (S) un solide de masse m et de centre d’inertie G en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$;
- Soit **A un point de (S)** ;

On a $\quad \vec{\sigma}_A(S/R)=\displaystyle\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)dm$

A et P sont deux points de (S) donc :

$$\vec{V}(P/R)=\vec{V}(P\in S/R)=\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}$$

Alors $\quad \vec{\sigma}_A(S/R)=\displaystyle\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$

$$=\underbrace{\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(A\in S/R)\,dm}_{\left(\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\,dm\right)\wedge\vec{V}(A\in S/R)}+\underbrace{\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm}_{\vec{J}_A(S,\vec{\Omega}(S/R))}$$

($\vec{V}(A\in S/R)$ est indépendant de m)

Et $\quad \displaystyle\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\,dm=m\overrightarrow{AG}$

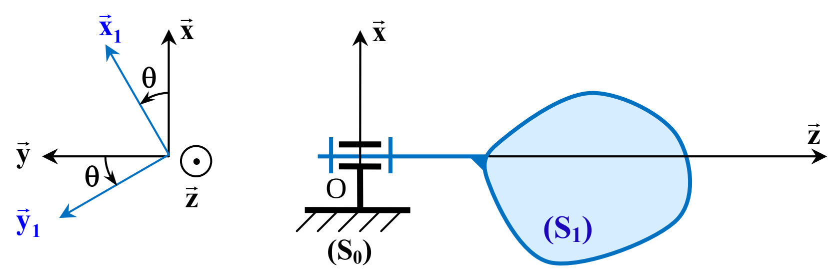
D’où

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\sigma}_A(S/R)&=\vec{J}_A(S,\vec{\Omega}(S/R))+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R)\\&=[I_A(S)]\vec{\Omega}(S/R)+m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R)\end{aligned}}$$

(A est un point du solide (S))

* **Cas particuliers :**

- **Le point A est fixe dans R :** $\quad \vec{\sigma}_A(S/R)=\vec{J}_A(S,\vec{\Omega}(S/R))=[I_A(S)]\vec{\Omega}(S/R)$
- **Le point A est confondu avec G (A ≡ G) :** $\quad \boxed{\vec{\sigma}_G(S/R)=\vec{J}_G(S,\vec{\Omega}(S/R))=[I_G(S)]\vec{\Omega}(S/R)}$
- **Solide (S_1) en rotation autour d’un axe fixe dans le repère R :**
  $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ repère lié au bâti (S_0) ;
  $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ repère lié à (S_1) ;
  $L(S_1/S_0)$ = pivot d’axe $(O,\vec{z})$, soit $\theta=(\vec{x},\vec{x}_1)=(\vec{y},\vec{y}_1)$.



Soit $\left[I_O(S_1)\right]=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})}$

Le point O est fixe dans R donc $\vec{\sigma}_O(S_1/R)=\left[I_O(S_1)\right]\vec{\Omega}(S_1/R)$

Or $\vec{\Omega}(S_1/R)=\dot{\theta}\,\vec{z}$ donc $\vec{\sigma}_O(S_1/R)=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})}=\begin{pmatrix} -E\dot{\theta} \\ -D\dot{\theta} \\ C\dot{\theta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})}$

$$\underline{\vec{\sigma}_O(S_1/R)=-E\dot{\theta}\,\vec{x}_1-D\dot{\theta}\,\vec{y}_1+C\dot{\theta}\,\vec{z}}$$

<u>Remarques concernant ce cas particulier :</u>

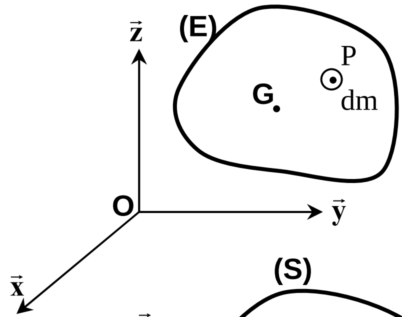
. **Rq1 :** pour un solide (S_1) en rotation autour de l'axe $(O,\vec{z})$ fixe dans R, $\vec{\sigma}_O(S_1/R)$ n'est porté par l'axe de rotation $\vec{z}$ ($\vec{\sigma}_O(S_1/R)=C\dot{\theta}\vec{z}$) que si E = D = 0 , donc que si $(O,\vec{z})$ est un **axe principal d'inertie** de (S_1) .

. **Rq2 :** La projection du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(S_1/R)$ sur l'axe de rotation $\vec{z}$ est :

$\underline{\vec{z}.\vec{\sigma}_O(S_1/R)=C\dot{\theta}=I_{Oz}\dot{\theta}}$

avec I_{Oz} = C : moment d'inertie de (S_1) par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$

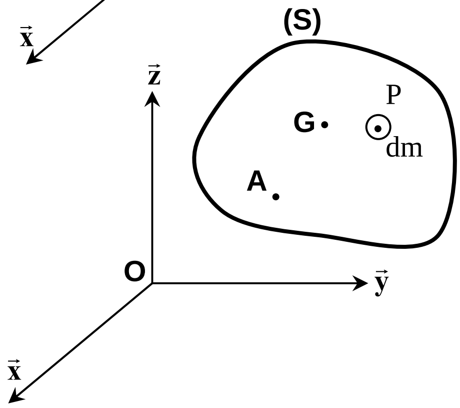
VII- ENERGIE CINETIQUE :



L'énergie cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport au repère R est le scalaire positif :

$$T(E/R)=\frac{1}{2}\int_{P\in E}\left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm$$

IIX- ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE :



- Soit (S) un solide de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$;
- Soit **A un point de (S)** ;

Par définition l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$T(S/R)=\frac{1}{2}\int_{P\in S}\left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm$$

A et P sont deux points de (S) donc :

$$\vec{V}(P/R)=\vec{V}(P\in S/R)=\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}$$

Donc

$$2T(S/R)=\int_{P\in S}\left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm=\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\vec{V}(P/R)\,dm$$

$$=\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\left(\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$=\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\vec{V}(A\in S/R)\,dm+\int_{P\in S}\vec{V}(P/R).\left(\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm$$

$$=\vec{V}(A\in S/R).\int_{P\in S}\vec{V}(P/R)\,dm+\int_{P\in S}\vec{\Omega}(S/R).\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right)dm$$

$$=\vec{V}(A\in S/R).\int_{P\in S}\vec{V}(P/R)\,dm+\vec{\Omega}(S/R).\int_{P\in S}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right)dm$$

($\vec{V}(A\in S/R)$ et $\vec{\Omega}(S/R)$ sont indépendant de m)

Donc

$$2T(S/R)=\vec{V}(A\in S/R).m\vec{V}(G/R)+\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_A(S/R)$$

D'où

$$\boxed{\mathbf{2T(S/R)=\{\mathcal{V}(S/R)\}\{\mathcal{C}(S/R)\}}}$$

Torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R

Torseur cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R

- **Comoment exprimé au même point A :**

$$2T(S/R)=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A\in S/R)\end{Bmatrix}_A\begin{Bmatrix}m\vec{V}(G/R)\\ \vec{\sigma}_A(S/R)\end{Bmatrix}_A$$

donc

$$\boxed{2T(S/R)=\vec{V}(A\in S/R).m\vec{V}(G/R)+\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_A(S/R)}$$

- **Comoment exprimé au même point G (centre d'inertie de (S)) :**

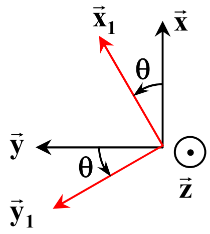
$$2T(S/R)=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(G/R)\end{Bmatrix}_G\begin{Bmatrix}m\vec{V}(G/R)\\ \vec{\sigma}_G(S/R)\end{Bmatrix}_G$$

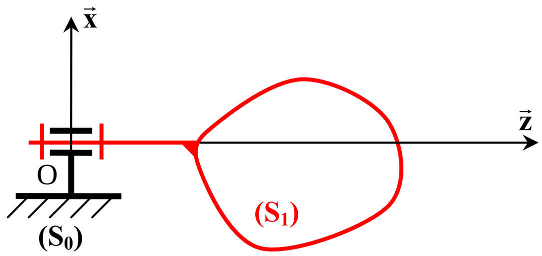
donc $\boxed{2T(S/R)=m\left(\vec{V}(G/R)\right)^2+\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_G(S/R)}$

* **Cas particuliers :**

- **Le point A est fixe dans R :** $\boxed{2T(S/R)=\vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}_A(S/R)}$

- **Solide (S_1) en rotation autour d'un axe fixe dans le repère R :**





Le point O est fixe dans R donc $2T(S_1/R)=\vec{\Omega}(S_1/R).\vec{\sigma}_O(S_1/R)=\vec{\Omega}(S_1/R).\vec{J}_O(S_1,\vec{\Omega}(S_1/R))$

Or $\vec{\Omega}(S_1/R)=\dot{\theta}\,\vec{z}$ donc :

$2T(S_1/R)=\dot{\theta}\vec{z}\,.\vec{J}_O(S_1,\dot{\theta}\vec{z})=\dot{\theta}^2\vec{z}.\vec{J}_O(S_1,\,\vec{z})$

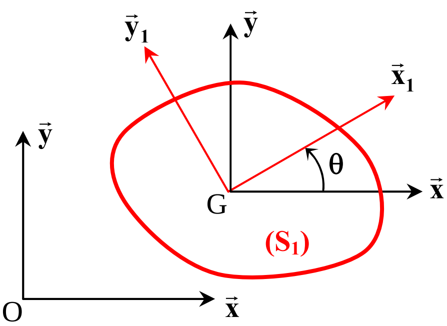
Car l'opérateur d'inertie est linéaire

Et $\vec{z}.\vec{J}_O(S_1,\,\vec{z})=I_{Oz}$: moment d'inertie de (S_1) par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$

Donc $2T(S_1/R)=I_{Oz}\,\dot{\theta}^2$

$$T(S_1/R)=\frac{1}{2}I_{Oz}\,\dot{\theta}^2$$

- **Le mouvement de (S_1) par rapport à R est tel que $\vec{\Omega}(S_1/R)=\dot{\theta}\vec{z}$ (mouvement plan sur plan ou hélicoïdal …)**



$2T(S_1/R)=m\left(\vec{V}(G/R)\right)^2+\vec{\Omega}(S_1/R).\vec{\sigma}_G(S_1/R)$

$=m\left(\vec{V}(G/R)\right)^2+\vec{\Omega}(S_1/R).\vec{J}_G(S_1,\vec{\Omega}(S_1/R))$

Or $\vec{\Omega}(S_1/R)=\dot{\theta}\,\vec{z}$ donc

$2T(S_1/R)=m\left(\vec{V}(G/R)\right)^2+\dot{\theta}\vec{z}.\vec{J}_G(S_1,\dot{\theta}\vec{z})$

$=m\left(\vec{V}(G/R)\right)^2+\dot{\theta}^2\vec{z}.\vec{J}_G(S_1,\vec{z})$

$=m\left(\vec{V}(G/R)\right)^2+\dot{\theta}^2 I_{Gz}$

Donc $$T(S_1/R)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}(G/R)\right)^2+\frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\theta}^2$$

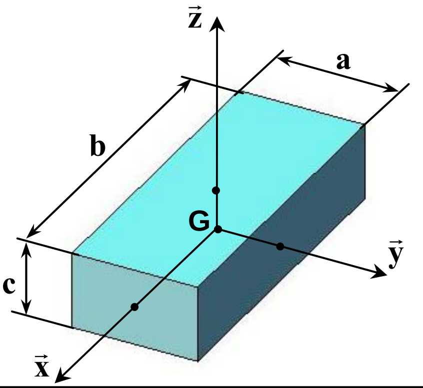
Avec I_{Gz} : moment d'inertie de (S_1) par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$

- **Le solide (S_1) est en mouvement de translation par rapport au repère R :**

$T(S_1/R)\;=\;\frac{1}{2}m\left[\vec{V}(G/R)\right]^2\;=\;\frac{1}{2}m\left[\vec{V}(A\in S_1/R)\right]^2\qquad(\forall\ A\in(S_1))$

MATRICES D'INERTIE DES SOLIDES USUELS au centre d'inertie G

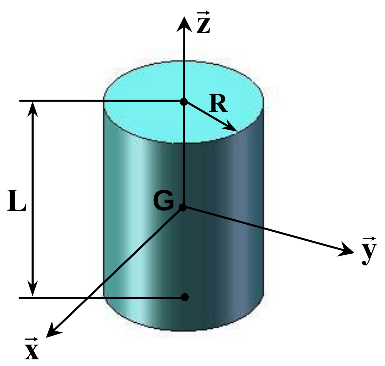
PARALLELEPIPEDE PLEIN



$$[I_G(S)]=\begin{pmatrix} \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}_{(\vec x,\vec y,\vec z)}$$

- A déduire celle d'une plaque plane rectangulaire dans le plan $(G,\vec x,\vec y)$: $c\to 0$. Celle d'une tige rectiligne suivant $(G,\vec x)$ si de plus $a\to 0$
- plaque rectangulaire dans le plan $(G,\vec x,\vec z)$: $a\to 0$
- plaque rectangulaire dans le plan $(G,\vec y,\vec z)$: $b\to 0$

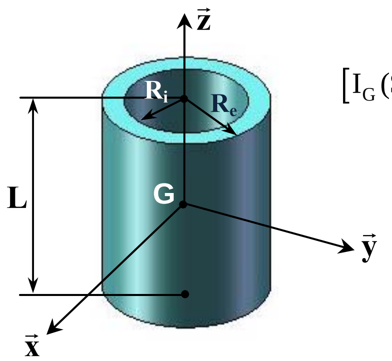
CYLINDRE PLEIN



$$[I_G(S)]=\begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec x,\vec y,\vec z)} \quad \text{ou} \quad (-,-,\vec z)$$

- A déduire celle d'un disque dans le plan $(G,\vec x,\vec y)$: $L\to 0$
- A déduire celle d'une tige suivant $\vec z$: $R\to 0$

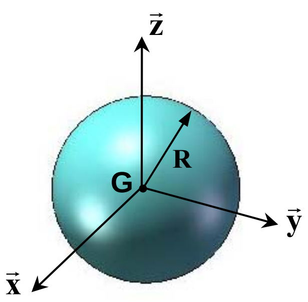
CYLINDRE CREUX



$$[I_G(S)]=\begin{pmatrix} m\left(\frac{R_i^2+R_e^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R_i^2+R_e^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R_i^2+R_e^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec x,\vec y,\vec z)} \quad \text{ou} \quad (-,-,\vec z)$$

- A déduire celle d'un cylindre creux d'épaisseur négligeable : $R_i\to R_e$
- Disque creux : $L\to 0$

SPHERE PLEINNE

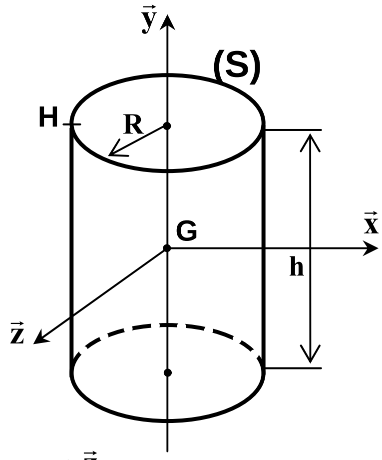


$$[I_G(S)]=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec x,\vec y,\vec z)} \quad \text{ou} \quad (-,-,-)$$

CINETIQUE (Exercices)

EXERCICE 1 :

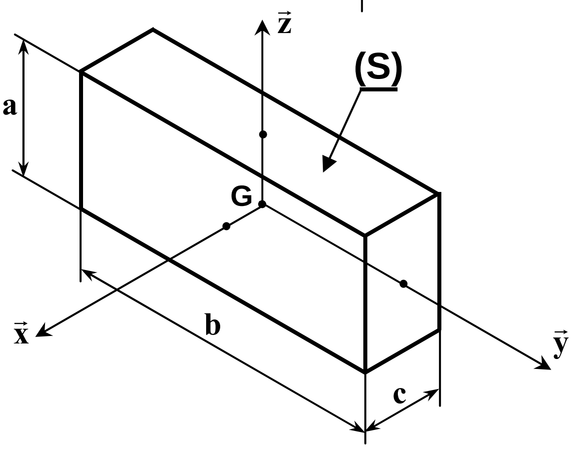
La figure ci-contre représente un cylindre plein de révolution **(S)** de rayon R, de hauteur h, homogène, de masse m et de centre d'inertie G.
Soit $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié à **(S)** tel que $(G,\vec{y})$ est confondu avec l'axe de symétrie matérielle de **(S)**.



1) Donner la matrice d'inertie du cylindre (S) au point G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
2) Déterminer la matrice d'inertie du cylindre **(S)** au point H , tel que $\overrightarrow{GH} = -R\,\vec{x} + (h/2)\,\vec{y}$.

EXERCICE 2 :

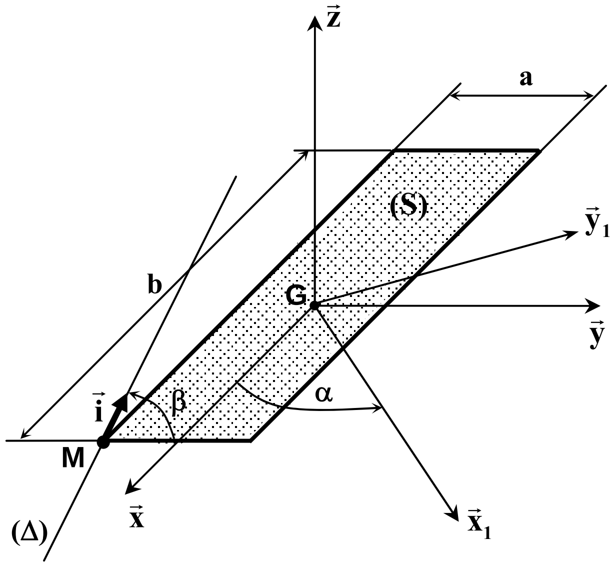
La figure ci-contre représente un parallélépipède **(S)** rectangle plein, de masse m et homogène.
$R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est un repère lié à **(S)** tel que G soit son centre d'inertie et $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont parallèles à ses arrêtes comme les montre la figure ci-contre.



1) Donner en fonction de m , a , b et c la matrice d'inertie de (S) au point G, exprimée dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
2) **a)** Que devient cette matrice dans le cas ou **(S)** est un cube plein de coté a (a = b = c) ?
   b) Quel est dans le même cas le moment d'inertie de **(S)** par rapport à n'importe quel axe passant par G ?

EXERCICE 3 :

Une pale d'hélicoptère est schématisée par une plaque plane rectangulaire **(S)** de largeur a, de longueur b et d'épaisseur négligeable.
(S) est homogène, de masse m et de centre d'inertie G.
Soit $R(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié à **(S)** tel que l'axe $(G,\vec{x})$ soit parallèle au plus grand coté du rectangle, et l'axe $(G,\vec{z})$ perpendiculaire au plan du rectangle.

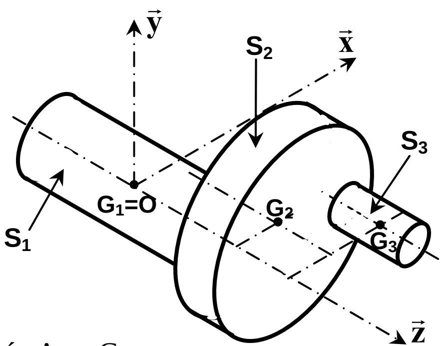


Questions :

1) Donner en fonction de m a et b la matrice d'inertie de **(S)** au point G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ notée $[I_G(S)]$.
2) Déterminer la matrice d'inertie de **(S)** au point M Dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
3) En déduire le moment d'inertie de **(S)** par rapport à l'axe de rotation de la pale $\Delta = (M,\vec{i})$ tel que $\vec{i} = \cos\beta\,\vec{y} + \sin\beta\,\vec{z}$.
4) Déterminer la matrice d'inertie de **(S)** au point G dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})$ telle que $\alpha = (\vec{x},\vec{x}_1) = (\vec{y},\vec{y}_1)$.

EXERCICE 4 :

La figure ci-contre représente un vilebrequin (S) qu'on peut répartir en trois cylindres de révolutions (S_1) , (S_2) et (S_3) d'axes parallèles à $(O,\vec{z})$ et tels que :



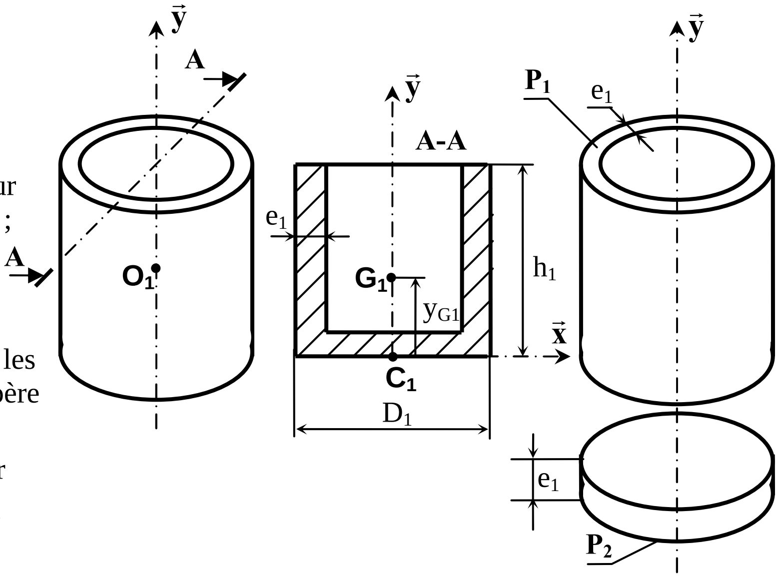
- (S_1) : de masse m_1 et de centre d'inertie $G_1(0,0,0)$;
- (S_2) : .. m_2 .. .. .. $G_2(a_2 ,0, c_2)$;
- (S_3) : .. m_3 .. .. .. $G_3(a_3 ,0, c_3)$;

Pour chaque cylindre (S_i) les moments d'inertie principaux au point G_i seront notée A_i et C_i.
Question : Déterminer, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ la matrice d'inertie du solide (S) au point O (confondu avec G_1).

EXERCICE 5 :

La figure ci-contre représente un tambour (S_1) sous la forme d'un tube de diamètre D_1 et d'épaisseur e_1, fermé d'un coté .
On peut répartir (S_1) en deux parties :

- Partie P_1 : cylindre creux de diamètre extérieur D_1 , de hauteur h_1-e_1 , d'épaisseur e_1 et de masse m_{p1} ;
- Partie P_2 : cylindre plein de diamètre D_1 , de hauteur e_1 et de masse m_{p2} .



Questions :

1) Déterminer en fonction de m_{p1} , m_{p2} , e_1 et h_1 les coordonnées du centre d'inertie G_1 de (S_1) dans le repère $R(C_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

2) Déterminer le moment d'inertie I_1 de (S_1) par rapport à l'axe $(O_1,\vec{y})$. Laisser apparaître m_{P1} et m_{P2}.

EXERCICE 6 :

1) La figure 2 représente un cylindre creux **(S_i)** de masse m_i , de centre d'inertie G_i , de rayon intérieur R , d'épaisseur e et de longueur L .

1.1) Donner en fonction de m_i , R , e et L la matrice d'inertie du solide **(S_i)** au point G_i dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

2) La figure 3 représente le bras d'un robot de longueur variable , il est composé de deux tubes de mêmes formes que le solide **(S_i)** de la figure 2 :

- **(S_1)** : cylindre creux , masse m_1 centre d'inertie G_1 , rayon intérieur R , épaisseur e , Longueur L ;
- **(S_2)** : cylindre creux , masse m_2 centre d'inertie G_2 , rayon extérieur R , épaisseur e , Longueur L .

Le paramètre X est assuré par un vérin d'inertie négligeable non représenté .

2.1) Déterminer en fonction de m_1 , m_2 , R , X , e et L le moment d'inertie du bras $\Sigma = \{S_1 , S_2\}$ par rapport à l'axe $(O_1 , \vec{z})$.

2.2) Déterminer en fonction de R , X , e et L les coordonnées du centre d'inertie de l'ensemble $\Sigma = \{S_1 , S_2\}$ dans le repère $R(O_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ (**(S_1)** et **(S_2)** ont même masse volumique).

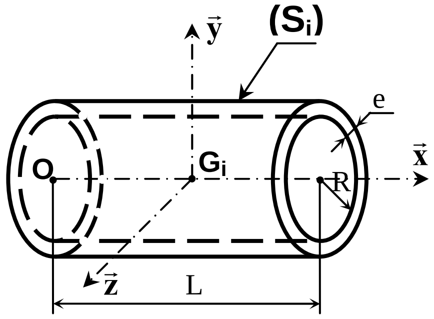


Figure 2

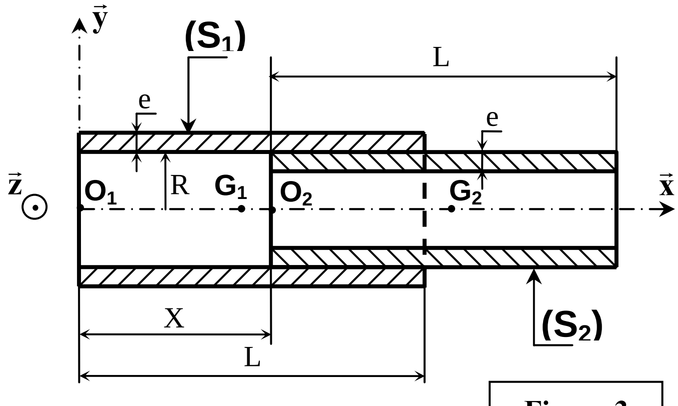


Figure 3

EXERCICE 7 :

La **figure 4 (page 3)** schématise grossièrement une hélice **(H)** d'hélicoptère, à quatre pales identiques **(P_i)** (i = 1 , 2 , 3 , 4). Chaque pale **(P_i)** est modélisée par une plaque plane rectangulaire. Le repère $R(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié à l'hélice **(H)** . Les quatre pales sont toutes inclinées d'un angle α par rapport au plan $(A,\vec{x},\vec{y})$.

Le but de cet exercice est la détermination de la matrice d'inertie $[I_A(H)]$ de l'hélice **(H) = {P_1 , P_2 , P_3 , P_4}** au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. On pose à priori :

$$[I_A(H)] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} .$$

1) Par un raisonnement mathématique (en trois lignes maximum) montrer que $\int_{M \in P_1 \cup P_3} xz\,dm = 0$ et $\int_{M \in P_1 \cup P_3} yz\,dm = 0$;

En déduire alors que les produits d'inertie D et E de la matrice d'inertie $[I_A(H)]$ de l'hélice **(H)** sont nuls .

2) Par un raisonnement mathématique (en trois lignes maximum) montrer que $\int_{M \in P_1 \cup P_2} xy\,dm = 0$;

En déduire alors que le produit d'inertie F de la matrice d'inertie $[I_A(H)]$ de l'hélice **(H)** est nul .

Par la suite on se propose de déterminer $[I_A(H)]$ pour cela on raisonnera d'abord sur une pale **(P_i)** : (voir **figure 5**)
Chaque pale **(P_i)** est une plaque plane rectangulaire homogène , de masse m , de longueur 2L et de largeur a .

3) Déterminer , en fonction de m , a et L , la matrice d'inertie $[I_A(P_i)]$ de la pale **(P_i)** au point A dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ telle que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont contenus dans le plan de la pale et $\vec{k}$ perpendiculaire à celui-ci (voir **figure 5**) .

On considère maintenant la base $(\vec{i},\vec{u},\vec{z})$ telle que $\alpha = (\vec{u},\vec{j}) = (\vec{z},\vec{k})$ (voir **figure 5**) ;

4) Déterminer , en fonction de m , a , L et α , le moment d'inertie de la pale **(P_i)** par rapport à l'axe $(A,\vec{u})$.

5) Déterminer , en fonction de m , a , L et α , le moment d'inertie de la pale **(P_i)** par rapport à l'axe $(A,\vec{z})$.

6) A partir des résultats de toutes les questions précédentes déduire alors la matrice d'inertie de l'hélice **(H) = {P_1 , P_2 , P_3 , P_4}** (voir **figure 4**) au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

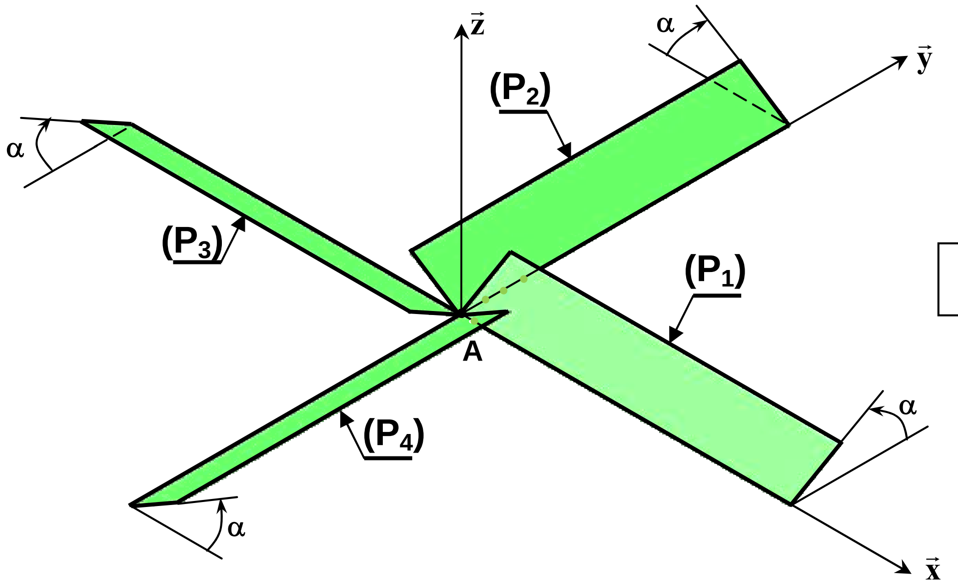


Figure 4

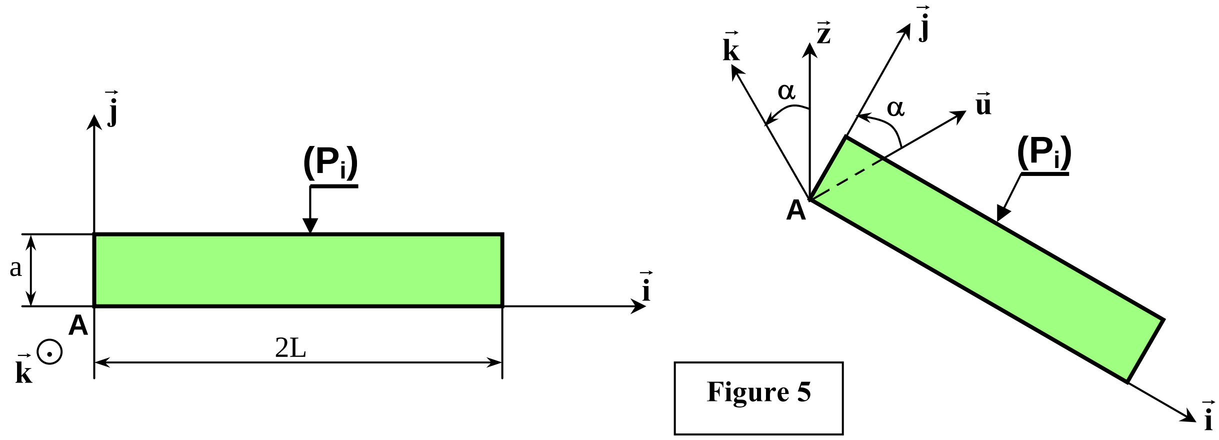
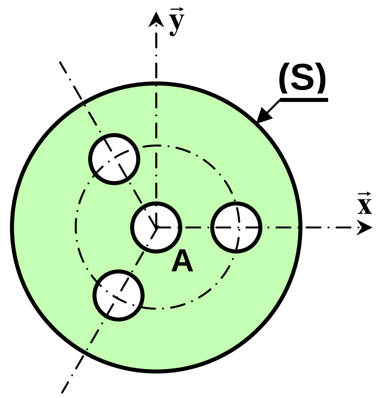


Figure 5

EXERCICE 8 :

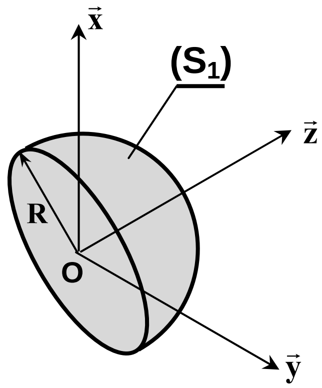


La figure ci-contre représente un disque (S) de masse m , homogène , d'épaisseur négligeable et de rayon 5r , il est percé de quatre trous de rayons r , l'un est centré en A et les trois autres sont également répartis sur un cercle de rayon 3r .

Question :

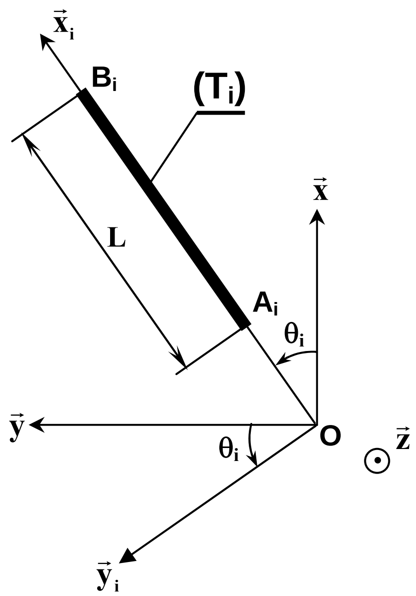
Déterminer en fonction de r et m , le moment d'inertie I_{Az} de (S) par rapport à l'axe $(A,\vec{z})$.

EXERCICE 9 :



1) On considère un solide **(S₁)** ayant la forme d'une demi sphère pleine homogène , de rayon R et de masse M. On note $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié à **(S_1)** tel que $(O,\vec{z})$ soit l'axe de symétrie matérielle de révolution de **(S_1)** , O le centre de sa surface de base et $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont situés dans le plan de celle-ci.
Montrer (en utilisant le résultat de la matrice d'inertie d'une sphère pleine en son centre d'inertie) que la matrice d'inertie de la demi sphère (S_1) au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est :

$$[I_O(S_1)]=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}M.R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}M.R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}M.R^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



2) On considère une tige **(T_i)** homogène de masse m de longueur $A_iB_i = L$.
On note $OA_i = R$.

a) Déterminer en fonction de m , L et R la matrice d'inertie de la tige **(T_i)** au point O dans la base $(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z})$.

b) Déterminer en fonction de m , L, R et θ_i le moment d'inertie de la tige **(T_i)** par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$.

c) Déterminer en fonction de m , L, R et θ_i le moment d'inertie de la tige **(T_i)** par rapport à l'axe $(O,\vec{y})$.

3) On considère maintenant un solide $\mathbf{(S)=\{S_1,T_1,T_2,T_3\}}$ (**figure 1**) constitué :

- D'une demi sphère **(S_1)**, de masse M et de rayon R. (solide de la question 1)) ;
- De trois tiges **(T_1)** , **(T_2)** et **(T_3)** qui sont rigidement liées à **(S_1)**, ces trois tiges ont même masse m, même longueur $A_iB_i = L$ et elles sont situées sur le même plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ de **(S_1)** comme les montre la **figure 1**.

a) Montrer que la matrice d'inertie du solide $\mathbf{(T)}=\{\mathbf{T_1},\mathbf{T_2},\mathbf{T_3}\}$ au point O, est diagonale dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

b) En déduire que la matrice d'inertie de $\mathbf{(S)}=\{\mathbf{S_1},\mathbf{T_1},\mathbf{T_2},\mathbf{T_3}\}$ au point O, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, est de la forme :

$$[I_O(S)]=\begin{pmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

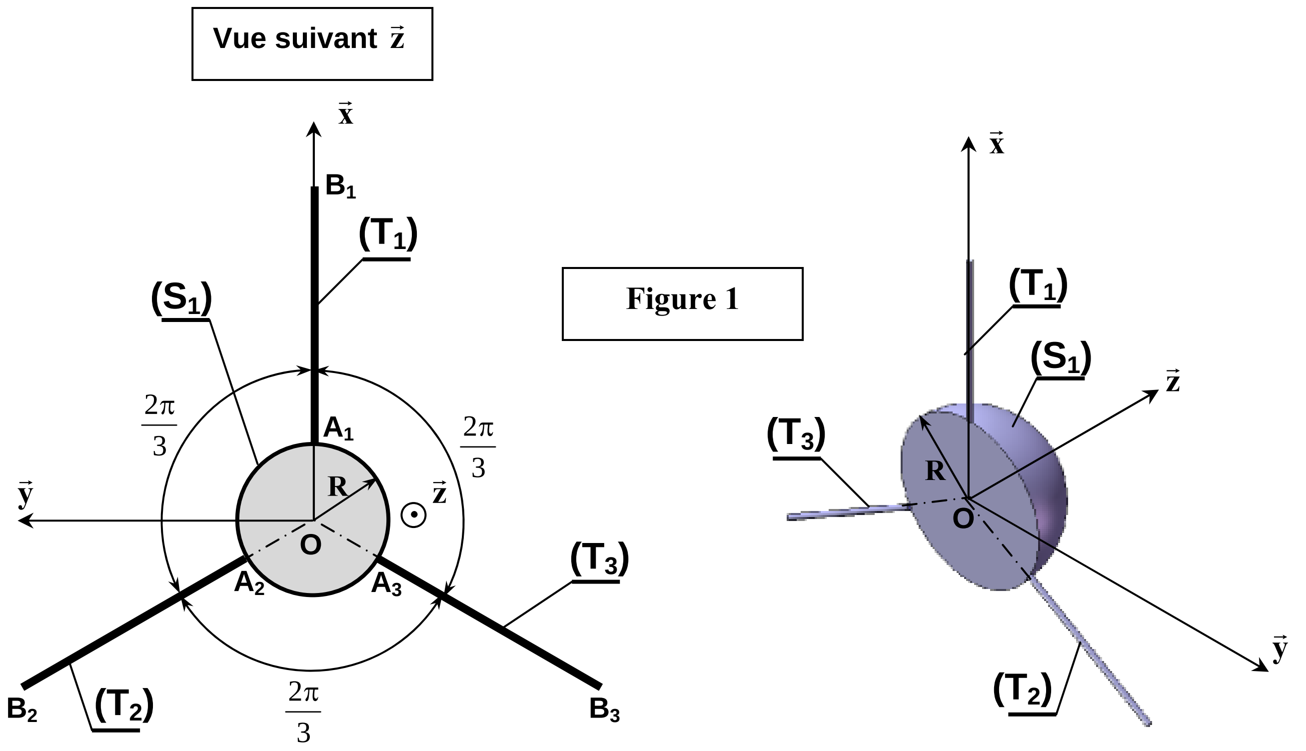


Figure 1

c) Déterminer en fonction de M , m , L et R les moments d'inertie A_S , B_S et C_s. Conclure.

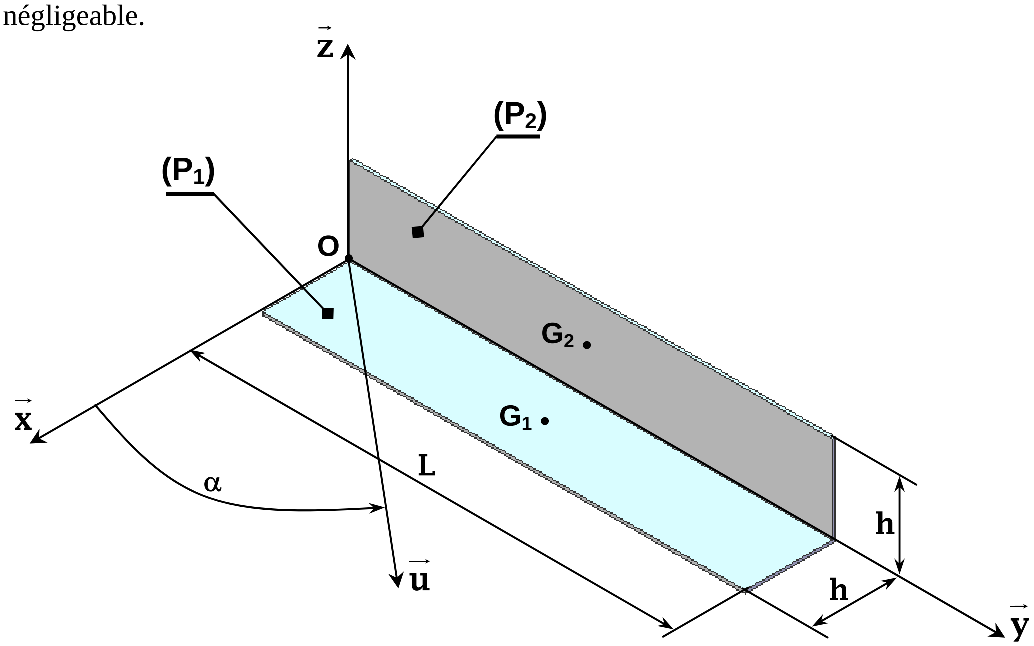
d) On note G_1 le centre d'inertie de la demi sphère $\mathbf{(S_1)}$ tel que $\overrightarrow{OG_1}=a\,\vec{z}$, déterminer en fonction de a, M et m les coordonnées du centre d'inertie G_S du solide $\mathbf{(S)}=\{\mathbf{S_1},\mathbf{T_1},\mathbf{T_2},\mathbf{T_3}\}$ dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

e) Peut on pratiquement jouer sur la valeur de la masse m pour rendre G_S confondu avec O.

f) Déterminer le moment d'inertie du solide $\mathbf{(S)}=\{\mathbf{S_1},\mathbf{T_1},\mathbf{T_2},\mathbf{T_3}\}$ par rapport à l'axe $(G_S,\vec{x})$.

EXERCICE 10 :

On considère un solide (S) constitué de deux plaques rectangulaires homogènes (P_1) et (P_2) qui sont rigidement liées. Les deux plaques sont identiques chacune de masse m, de centre d'inertie G_i (i=1,2) de longueur L, de largeur h et d'épaisseur négligeable.



1) Déterminer en fonction de h et L le vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du centre d'inertie G du solide (S) = (P_1)∪(P_2).
2) Donner en fonction de m, h et L, la matrice d'inertie de la plaque (P_1) seule au point G_1 dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
3) Déterminer fonction de m, h et L, la matrice d'inertie de la plaque (P_1) seule au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
4) Donner en fonction de m, h et L, la matrice d'inertie de la plaque (P_2) seule au point G_2 dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
5) Déterminer en fonction de m, h et L, la matrice d'inertie de la plaque (P_2) au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
6) En déduire en fonction de m, h et L, la matrice d'inertie du solide (S) = (P_1)∪(P_2) au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
7) Déterminer en fonction de m, h, L et α le moment d'inertie du solide (S) = (P_1)∪(P_2) par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$ avec $\vec{u}$ vecteur unitaire situé dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ et tel que $\alpha = (\vec{x},\vec{u})$.