Sciences Industrielles pour l'ingénieur

Cpge Tanger

Révision
Cinématique / Statique

- Les supports des exercices sont extraits de concours

Analyse sanguine automatisée

Le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié au bâti fixe 0.

Le repère $R_2(G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est lié au support 2 avec $\theta = (\vec{y}_0,\vec{y}_2) = (\vec{x}_0,\vec{x}_2)$.

G_i : Centre de gravité du solide i

$\overrightarrow{OG_1} = x.\vec{x}_0$

$\overrightarrow{OG_2} = x.\vec{x}_0 + d_1.\vec{z}_0$

$\overrightarrow{OG_3} = x.\vec{x}_0 + (d_1 + z).\vec{z}_0 + (d_2 + d).\vec{x}_2$

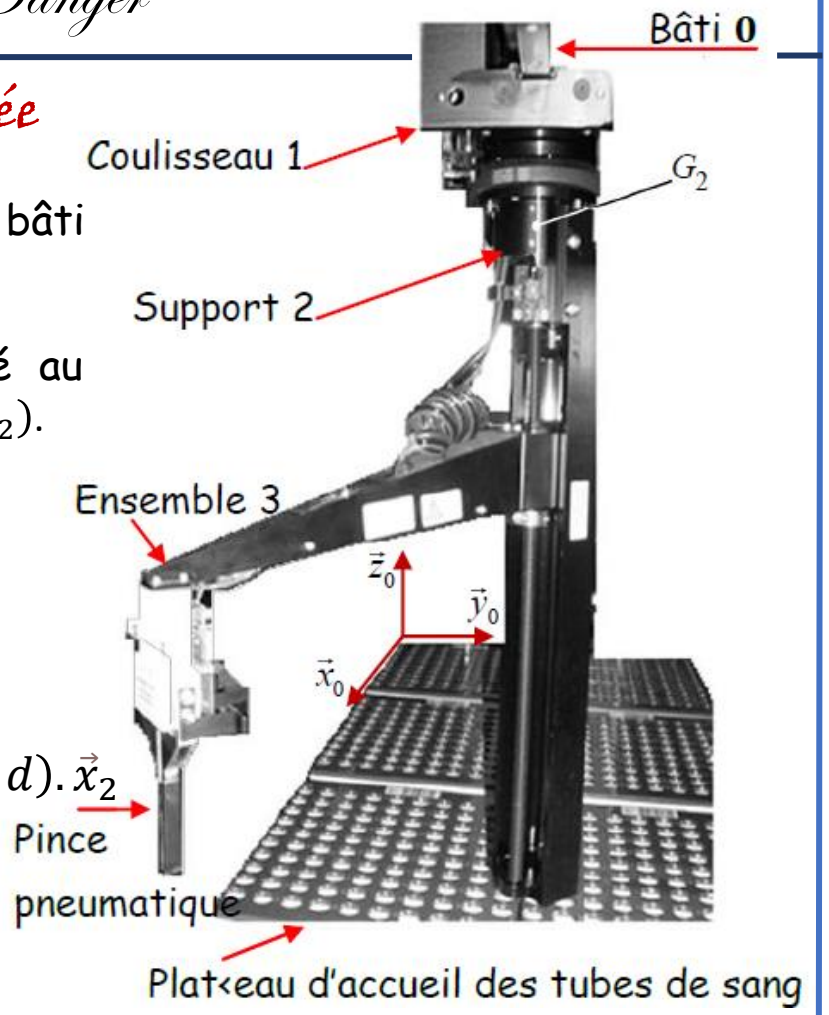
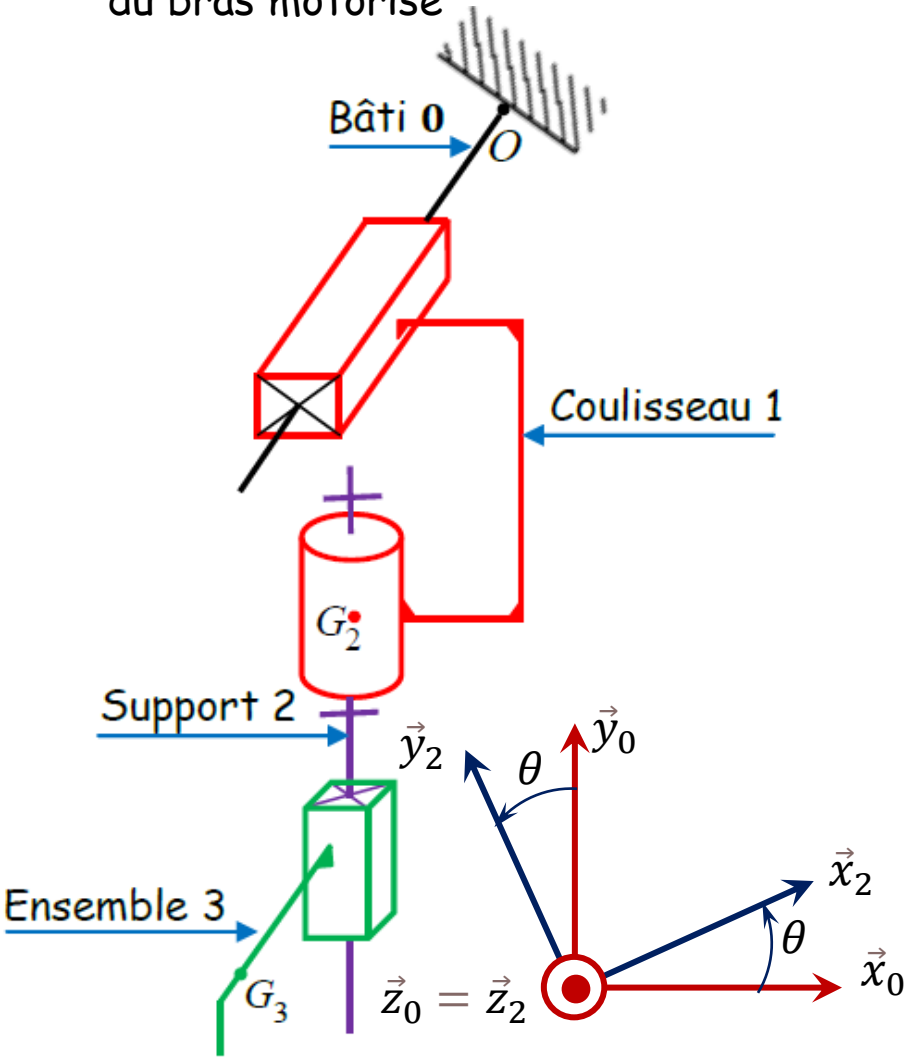


Figure 1 : Constitution du bras motorisé de manipulation des tubes

Liaison	Liaison 1/0	Liaison 2/1	Liaison 3/2
Modèle de liaison proposé	Glissière de direction $(\vec{x}_0)$	Pivot d'axe $(G_2,\vec{z}_0)$	Glissière de direction $(\vec{z}_0)$
Paramètre	$x(t)$	$\theta(t)$	$z(t)$

Figure 2 : Schéma cinématique du bras motorisé



Q°- Déterminer les vecteurs vitesse des centres G_i de gravité par rapport à R_0.

Attraction danse avec les robots

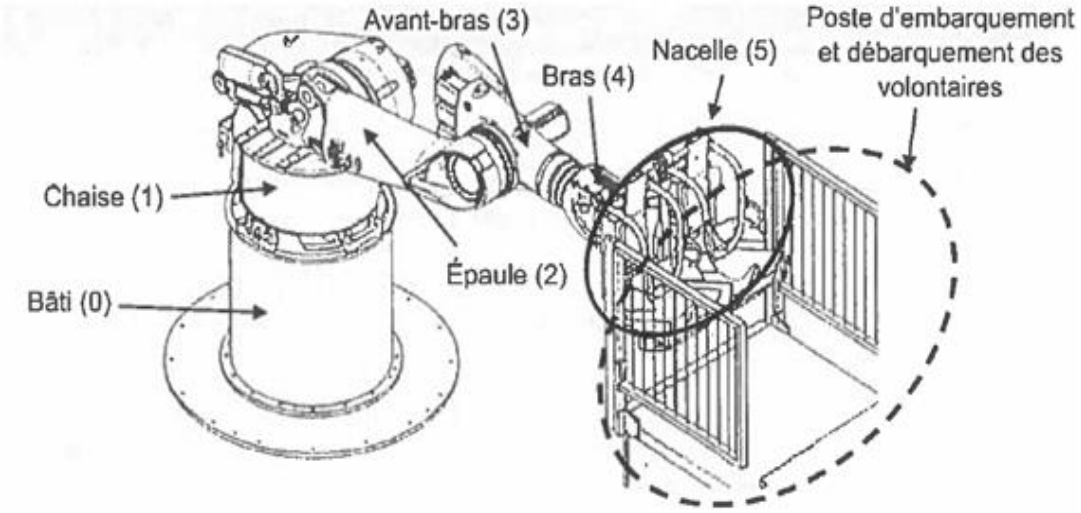


Figure 1 : Description globale du robot

Le robot est un système à 7 axes (7 degrés de liberté). Pour notre étude on se limitera à la modélisation définie par le schéma cinématique de la figure 2.

On note $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ le repère galiléen, associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti, de base $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le point O est le point d'intersection des axes des deux liaisons <u>pivots</u> entre les solides 0 et 1 et entre les solides 1 et 2.

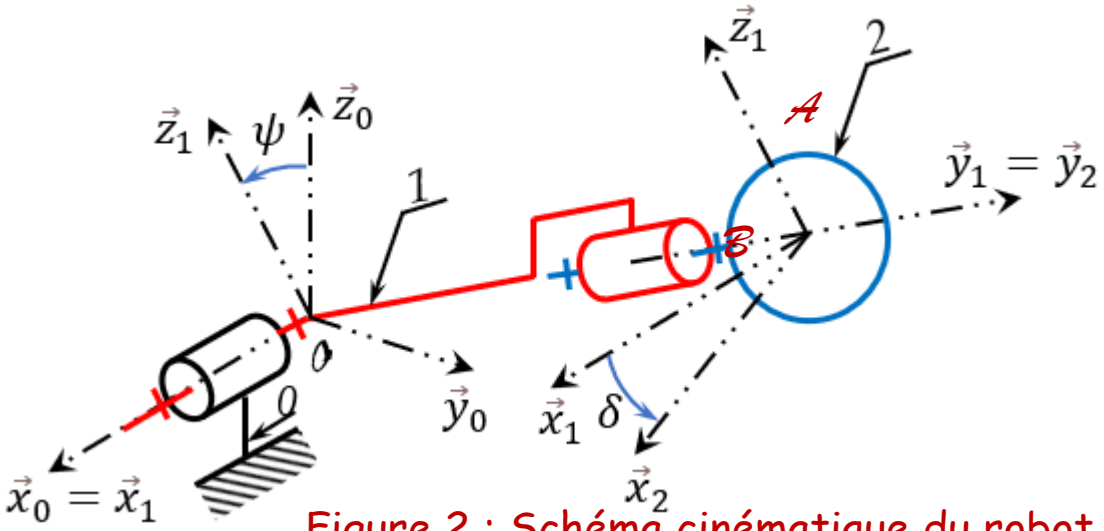


Figure 2 : Schéma cinématique du robot

- Le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est associé au bras 1 avec $\psi = (\vec{z}_0,\vec{z}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$
- Le repère $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est associé à la nacelle 2 avec $\delta = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{z}_1,\vec{z}_2)$

On donne : $\overrightarrow{OA} = L.\vec{y}_1$ $\overrightarrow{AB} = R.\vec{x}_2$

Question : Déterminer le vecteur vitesse du point B de la nacelle 2 dans son mouvement par rapport au repère R_0. $\vec{V}(B \in 2/R_0)$

Robot de manutention 3 axes

Solide	Paramétrage géométrique et Modèle adopté
0	Repère lié $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
1	Repère lié $R_1(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ L1/0 : liaison glissière de direction $\vec{z}_0$
2	Repère lié $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ L2/1 : liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$
3	Repère lié $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ $\psi = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ L3/2 : liaison pivot d'axe $(A, \vec{y}_2)$

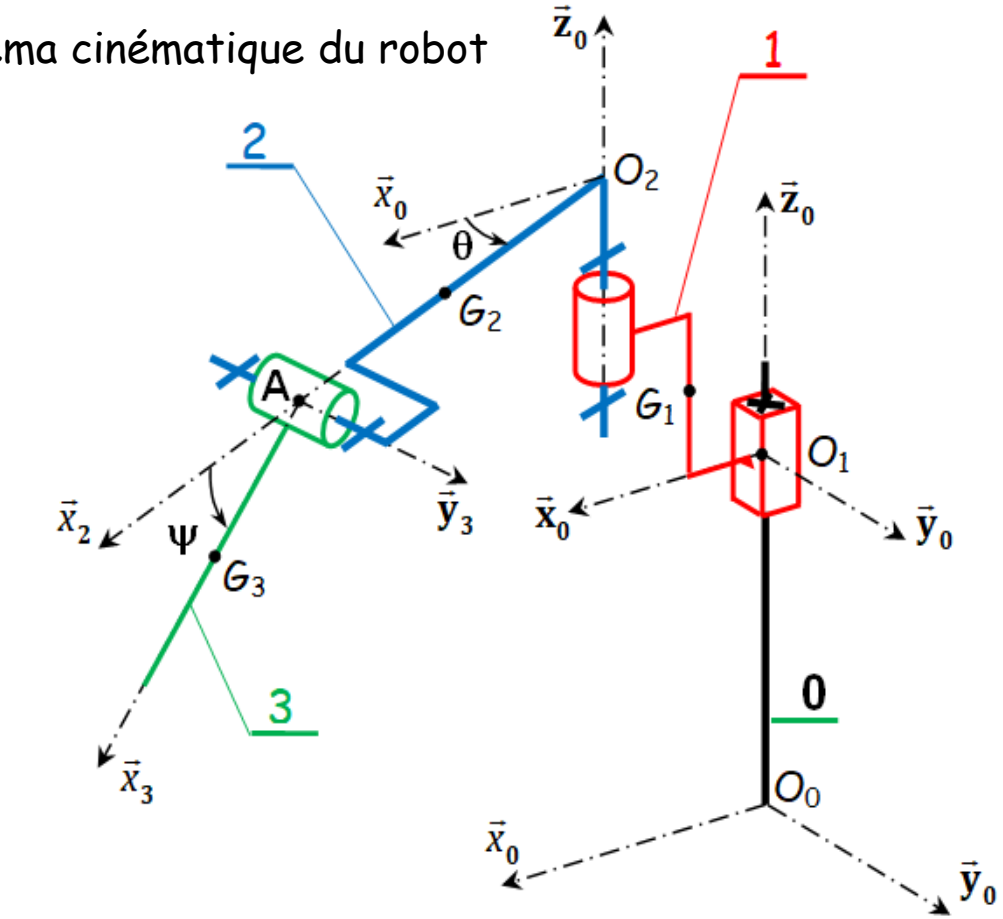
Données géométriques :	$\overrightarrow{O_0O_1} = \lambda(t).\vec{z}_0$	$\overrightarrow{O_1O_2} = a.\vec{x}_0 + b.\vec{z}_0$
$\overrightarrow{O_2A} = h.\vec{x}_2$	$\overrightarrow{O_2G_2} = d.\vec{x}_2$	$\overrightarrow{AG_3} = L.\vec{x}_3$

Q1°- Exprimer, dans la base du repère R_0, le vecteur position du point G_3 , $\overrightarrow{O_0G_3}$.

Q2°- Déterminer, en utilisant la dérivation vectorielle, le vecteur vitesse $\vec{V}(G_3 \in 3/0)$.

Q3°- Donner les torseurs cinématiques des liaisons $L_{3/2}$, $L_{2/1}$et $L_{1/0}$: $\{V(3/2)\}$ en A, $\{V(2/1)\}$ en O_2 et $\{V(1/0)\}$ en O_1 .

Schéma cinématique du robot



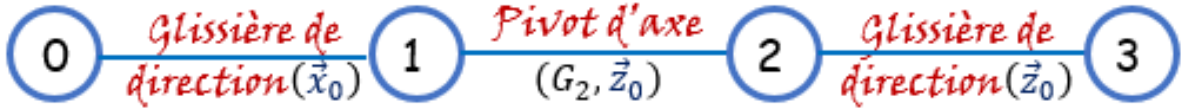
Q4°- Déterminer, par composition des torseurs cinématiques, le torseur cinématique au point O_2 du mouvement de 2/0, $\{V(2/0)\}$. . En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(G_2 \in 2/0)$.

Q5°- Déterminer, par composition des torseurs cinématiques, le torseur cinématique au point A du mouvement de 3/0, $\{V(3/0)\}$. En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(G_3 \in 3/0)$.

Prof_Affi

Analyse sanguine automatique

Graphe de liaisons



$x(t)$ Les paramètres géométriques $z(t)$

$\theta(t)$

Les torseurs cinématiques

$$\{V(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}.\vec{x}_0 \end{Bmatrix}_{\forall M} \quad \{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2} \quad \{V(3/2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{z}.\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{\forall M}$$

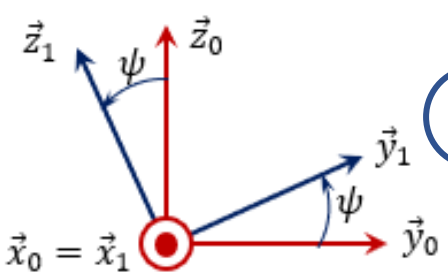
$$\{V(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \dot{x}.\vec{x}_0 \end{Bmatrix}_{G_2} \quad \{V(3/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \dot{z}.\vec{z}_0 + \dot{x}.\vec{x}_0 \end{Bmatrix}_{G_2}$$

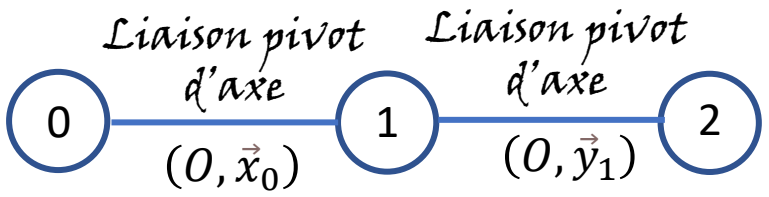
$$\boxed{\vec{V}(G_1 \in 1/0) = \dot{x}.\vec{x}_0} \qquad \boxed{\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \dot{x}.\vec{x}_0}$$

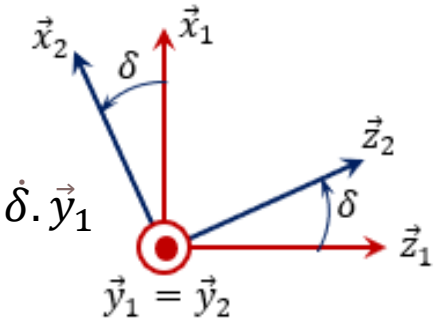
$$\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \vec{V}(G_2 \in 3/0) + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{G_2G_3}$$

$$\boxed{\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \dot{z}.\vec{z}_0 + \dot{x}.\vec{x}_0 + (d_2 + d).\dot{\theta}.\vec{y}_2}$$

Attraction danse avec les robots







$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}.\vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\delta}.\vec{y}_1$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\delta}.\vec{y}_1 + \dot{\psi}.\vec{x}_0$$

$$\vec{V}(B \in 2/0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_{R_0} = L.\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_{R_0} + R.\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_0}$$

$$\vec{V}(B \in 2/0) = L.\dot{\psi}.\vec{z}_1 + R.\left(\dot{\delta}.\vec{z}_2 + \dot{\psi}.\sin\delta.\vec{y}_1\right)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{y}_1 = \dot{\psi}.\vec{z}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{x}_2 = \left(\dot{\delta}.\vec{y}_1 + \dot{\psi}.\vec{x}_0\right) \wedge \vec{x}_2$$

$$= -\dot{\delta}.\vec{z}_2 + \dot{\psi}.\sin\delta.\vec{y}_1$$

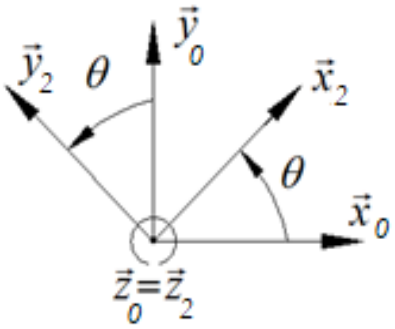
Prof_Affi

Robot de manutention 3 axes

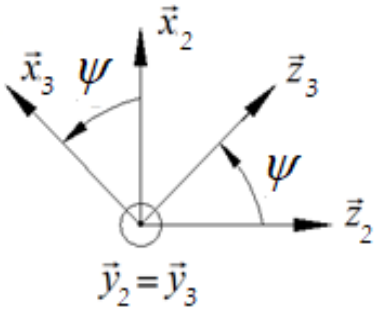
CNC 17

Q1°- $\overrightarrow{O_0G_3} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{AG_3}$

$$\overrightarrow{O_0G_3} = \lambda(t).\vec{z}_0 + a.\vec{x}_0 + b.\vec{z}_0 + h.\vec{x}_2 + L.\vec{x}_3$$



$$\vec{x}_3 = \cos\psi.\vec{x}_2 - \sin\psi.\vec{z}_2$$



$$\vec{x}_2 = \cos\theta.\vec{x}_0 + \sin\theta.\vec{y}_0$$

$$\boxed{\overrightarrow{O_0G_3} = \begin{pmatrix} a + h.\cos\theta + L.\cos\psi.\cos\theta \\ h.\sin\theta + L.\cos\psi.\sin\theta \\ \lambda(t) + b - L.\sin\psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}}$$

Q2°- $\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0G_3}\right]_{R_0}$

$$\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 + h.\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_0} + L.\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_3\right]_{R_0}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_2\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{x}_2$$

$$= \dot{\theta}.\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta}.\vec{y}_2$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_3\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_3/R_0) \wedge \vec{x}_3$$

$$= \left(\dot{\theta}.\vec{z}_2 + \dot{\psi}.\vec{y}_3\right) \wedge \vec{x}_3 = \dot{\theta}.\cos\psi.\vec{y}_2 - \dot{\psi}.\vec{z}_3$$

$$\boxed{\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 + (h + L.\cos\psi).\dot{\theta}.\vec{y}_2 - L.\dot{\psi}.\vec{z}_3}$$

Q3°- $\{V(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{O_1(ou\forall M)}$ $\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_2(ou\forall M\in O_2,\vec{z}_0)}$

$$\{V(3/2)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}.\vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A(ou\forall M\in A,\vec{y}_2)}$$

Q4°- $\{V(2/0)\} = \{V(2/1)\} + \{V(1/0)\}$

$$\boxed{\{V(2/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{O_2(ou\forall M\in O_2,\vec{z}_0)}}$$

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \vec{V}(O_2 \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overrightarrow{O_2G_2}$$

$\overrightarrow{O_2G_2} = d.\vec{x}_2$ $\boxed{\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 + d.\dot{\theta}.\vec{y}_2}$

Prof_Affi

Q5°- $\{V(3/0)\} = \{V(3/2)\} + \{V(2/1)\} + \{V(1/0)\}$

$$\{V(3/2)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}.\vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A(ou\forall M\in A,\vec{y}_2)}$$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_2(ou\forall M\in O_2,\vec{z}_0)}$$

$$\overrightarrow{O_2A} = h.\vec{x}_2$$

$$\vec{V}(A \in 2/1) = \vec{V}(O_2 \in 2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{O_2A}$$

$$\vec{V}(A \in 2/1) = h.\dot{\theta}.\vec{y}_2$$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ h.\dot{\theta}.\vec{y}_2 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{V(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{O_1(ou\forall M)}$$

$$\boxed{\{V(3/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}.\vec{y}_2 + \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ h.\dot{\theta}.\vec{y}_2 + \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A}$$

$$\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \vec{V}(A \in 3/0) + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{AG_3}$$

$$\vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{AG_3} = \left(\dot{\psi}.\vec{y}_2 + \dot{\theta}.\vec{z}_3\right) \wedge L.\vec{x}_3$$
$$= L.\left(-\dot{\psi}.\vec{z}_3 + \dot{\theta}.cos\psi\right).\vec{y}_2$$

$$\boxed{\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \dot{\lambda}(t).\vec{z}_0 + (h + L.cos\psi).\dot{\theta}.\vec{y}_2 - L.\dot{\psi}.\vec{z}_3}$$

Système d'orientation de miroirs

Un système de projection sur écran du plafond fait partie d'un ensemble de cinq systèmes de projection utilisés dans des techniques de réalité virtuelle (figure 1).

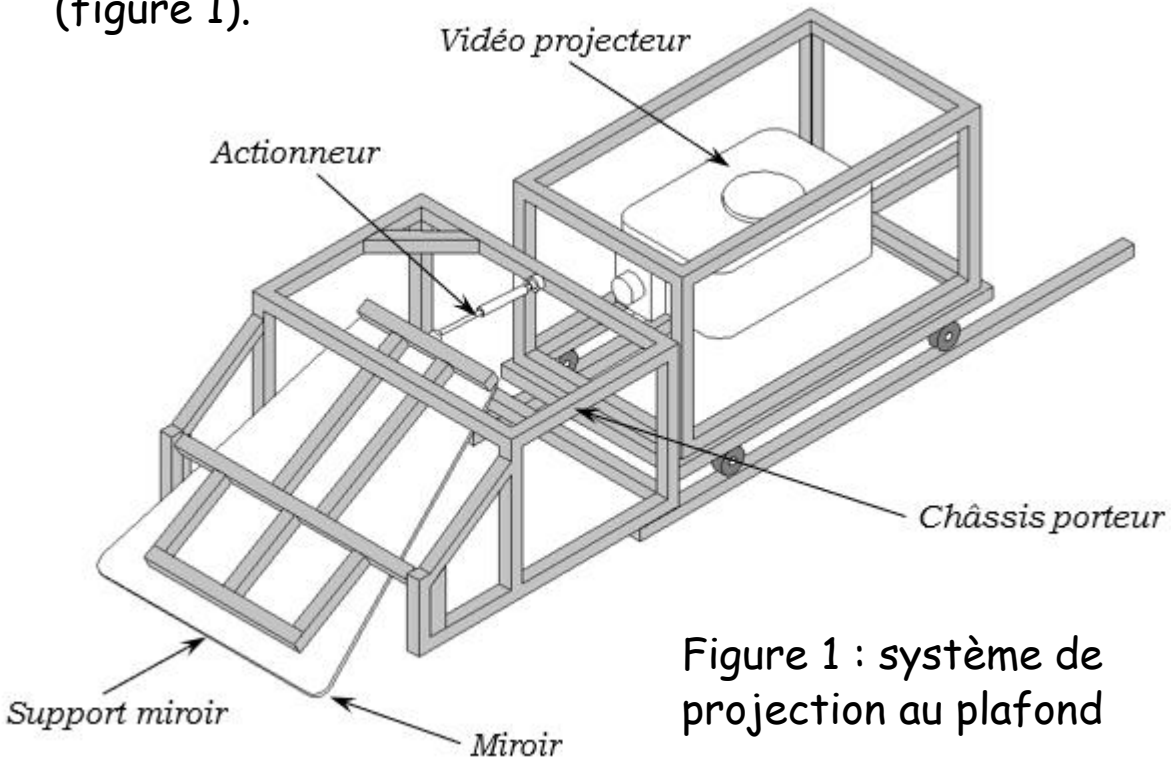


Figure 1 : système de projection au plafond

Dans cette étude on s'intéressera au système d'orientation de miroir assurant la projection des images issues du vidéoprojecteur sur le plafond. La figure 2 présente son diagramme de blocs internes (page suivante)..

Q1. A l'aide du diagramme de blocs internes, compléter sur la figure R1 du document réponse DR1 les zones manquantes des chaînes fonctionnelles du système d'orientation de miroir.

L'orientation du support de miroir est commandée par un vérin électrique. La figure 3 présente le schéma cinématique du mécanisme d'orientation.

Les principaux constituants de ce mécanisme sont :

- ✓ Le châssis (0).
- ✓ L'ensemble miroir + support (1) : en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le châssis (0).
- ✓ Le corps du vérin (3) : en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec le châssis (0).
- ✓ La tige du vérin (2) : en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec (1) et en liaison glissière de direction $(\vec{x}_2)$ avec (3).

<u>Données géométriques :</u>

$\overrightarrow{OA} = a.\vec{x}_1$ $\quad$ $\overrightarrow{OB} = d.\vec{x}_0 + h.\vec{y}_0$ $\quad$ $\overrightarrow{BA} = -\lambda(t).\vec{x}_2$

$a = 905mm$ $\quad$ $d = 1000mm$ $\quad$ $h = 630mm$

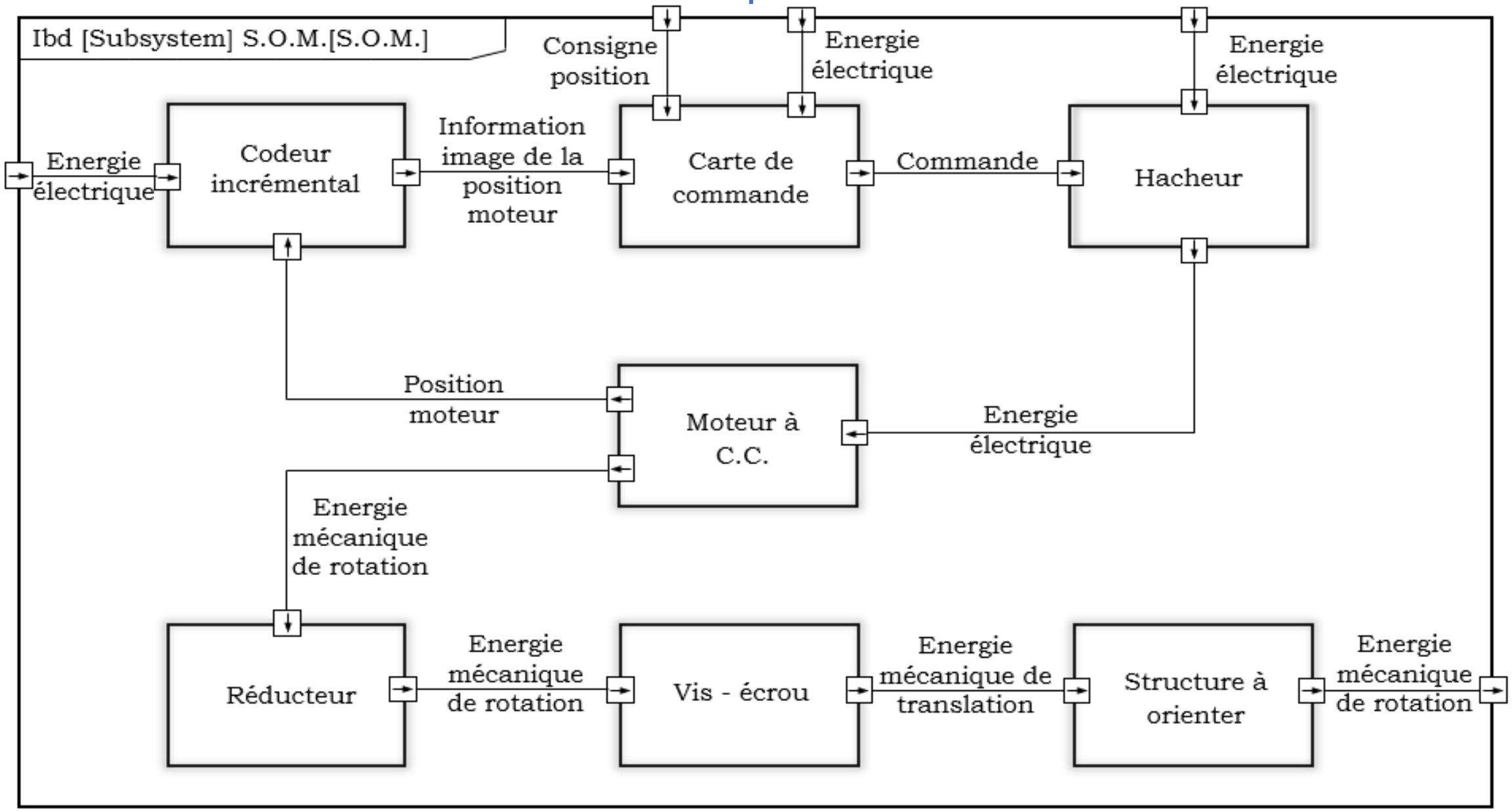


Figure 2 : Diagramme de blocs internes

Prof_Affi

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au châssis (0). Ce repère est supposé galiléen.
- ✓ Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à l'ensemble (1).
- ✓ Le repère $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ est lié à l'ensemble (1).
- ✓ Le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié à la tige du vérin électrique (2). On note $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ l'angle de rotation du vérin électrique par rapport au châssis (0).

Q2. Déterminer la loi entrée/sortie géométrique.

Q3. Déterminer, en utilisant la fermeture cinématique en A, la loi entrée/sortie cinématique

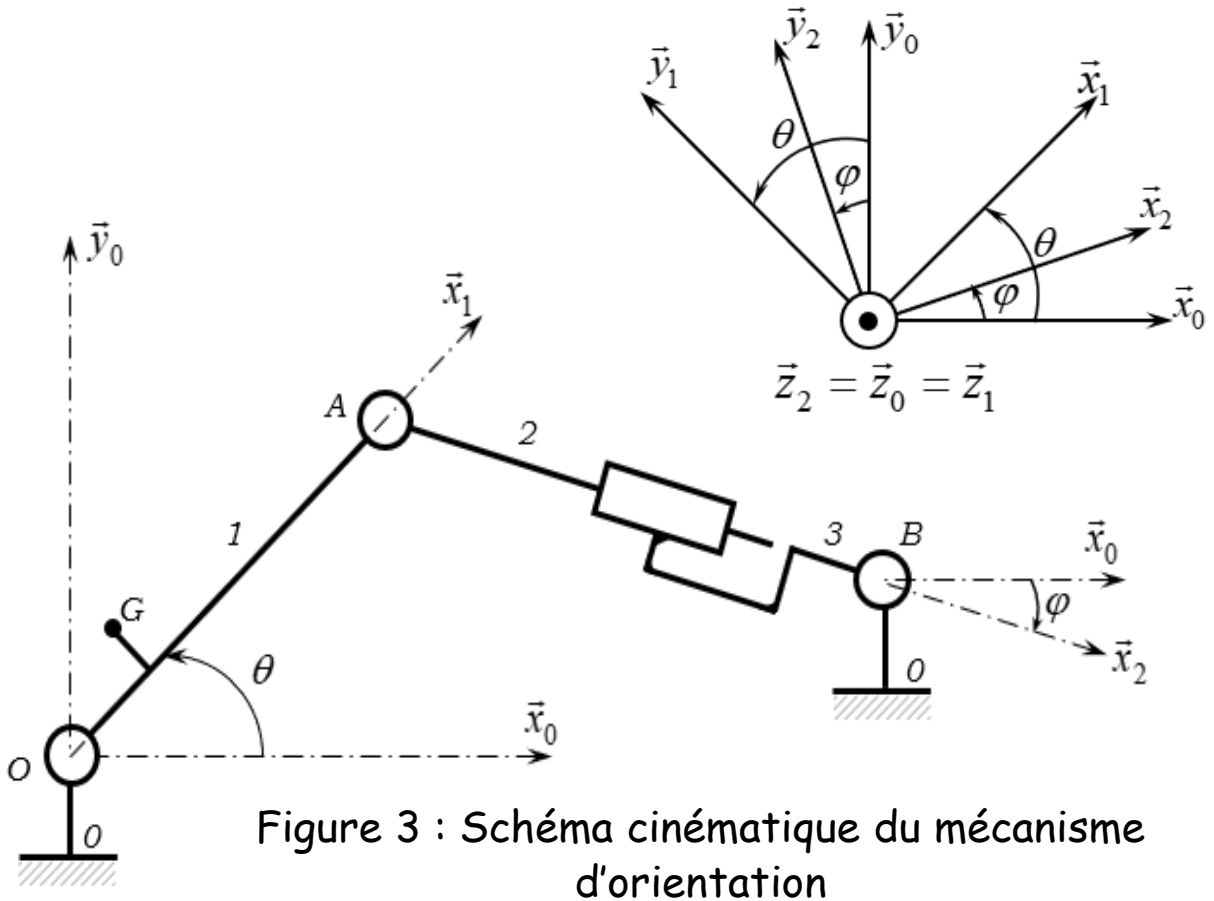
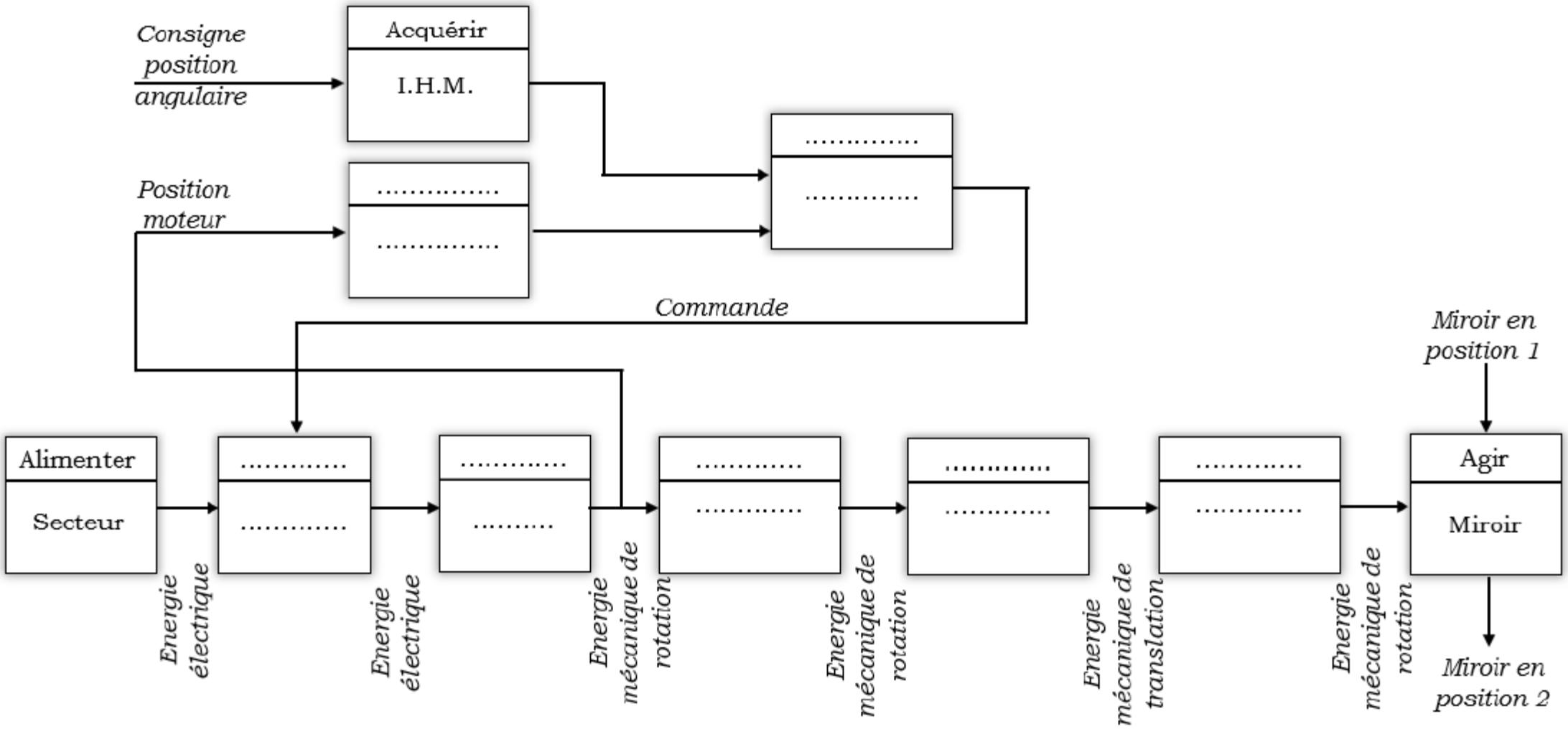
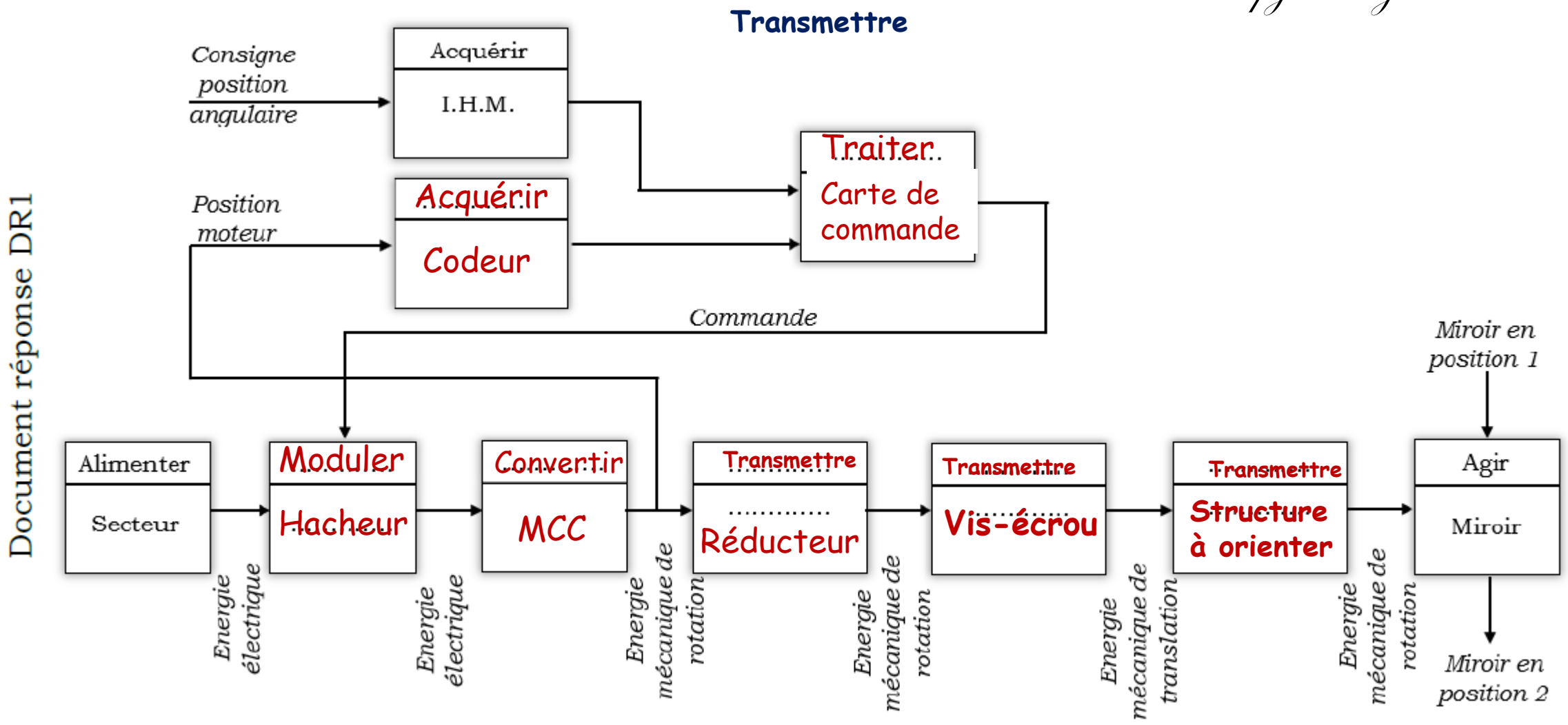


Figure 3 : Schéma cinématique du mécanisme d'orientation

Document réponse DR1



Q1.


Transmettre
Document réponse DR1
Consigne position angulaire
Acquérir
I.H.M.
Position moteur
Acquérir
Codeur
Traiter
Carte de commande
Commande
Miroir en position 1
Alimenter
Secteur
Moduler
Hacheur
Convertir
MCC
Transmettre
Réducteur
Transmettre
Vis-écrou
Transmettre
Structure à orienter
Agir
Miroir
Energie électrique
Energie électrique
Energie mécanique de rotation
Energie mécanique de rotation
Energie mécanique de translation
Energie mécanique de rotation
Miroir en position 2

Q1. Fermeture géométrique de la chaîne 0-1-2-3-0.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \quad \Rightarrow \quad a.\vec{x}_1 = d.\vec{x}_0 + h.\vec{y}_0 - \lambda(t).\vec{x}_2$$

La loi entrée/sortie géométrique

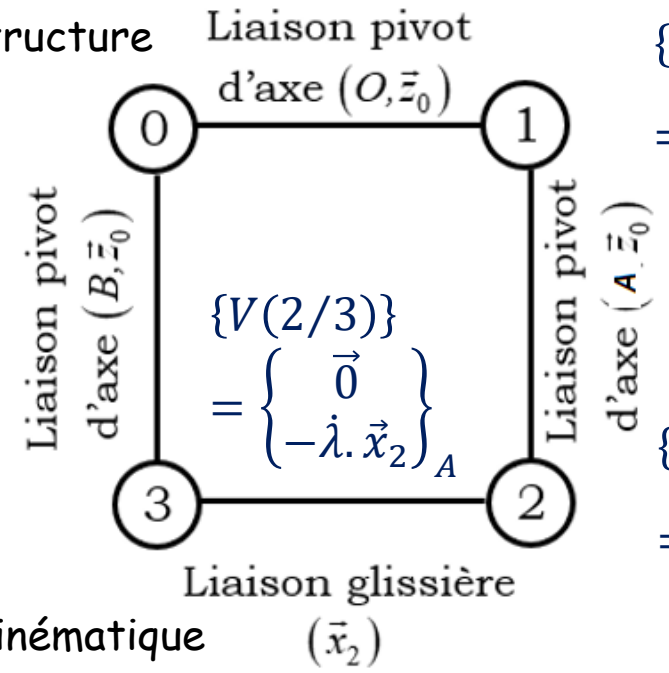
$$/\vec{x}_0 \Rightarrow a.cos\theta = d - \lambda(t).\cos\varphi$$

$$/\vec{y}_0 \Rightarrow a.\sin\theta = h - \lambda(t).\sin\varphi$$

$$\boxed{\lambda(t) = \sqrt{(d - a.cos\theta)^2 + (h - a.\sin\theta)^2}}$$

Q2. Détermination de la loi entrée/sortie cinématique :

Graphe de structure (de liaisons)



$$\{V(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

$$\{V(3/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\{V(2/3)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -\dot{\lambda}.\vec{x}_2 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{V(1/2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Fermeture cinématique

$$\{V(1/0)\} = \{V(1/2)\} + \{V(2/3)\} + \{V(3/0)\}$$

$$\vec{V}(A,1/0) = \vec{V}(A,1/2) + \vec{V}(A,2/3) + \vec{V}(A,3/0)$$

- $\vec{V}(A,1/0) = \vec{V}(O,1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{OA}$
- $\vec{V}(A,1/2) = \vec{0}$
- $\vec{V}(A,2/3) = -\dot{\lambda}(t).\vec{x}_2$
- $\vec{V}(A,3/0) = \vec{V}(B,3/0) + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{BA}$

$$\boxed{\vec{V}(A,1/0) = a.\dot{\theta}.\vec{y}_1}$$

$$\boxed{\vec{V}(A,3/0) = -\lambda(t).\dot{\varphi}.\vec{y}_2}$$

$$a.\dot{\theta}.\vec{y}_1 = -\dot{\lambda}(t).\vec{x}_2 - \lambda(t).\dot{\varphi}\vec{y}_2$$

$$/\vec{x}_2 \Rightarrow -a.\dot{\theta}.\sin(\theta - \varphi) = -\dot{\lambda}(t)$$

$$/\vec{y}_2 \Rightarrow a.\dot{\theta}.\cos(\theta - \varphi) = -\lambda(t).\dot{\varphi}$$

$$(a.cos\theta = d - \lambda(t).\cos\varphi).\sin\theta$$

$$(a.\sin\theta = h - \lambda(t).\sin\varphi).cos\theta$$

$$\Rightarrow \lambda(t).\sin(\theta - \varphi) = d.\sin\theta - h.cos\theta$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{a}{\lambda(t)}.(d.\sin\theta - h.cos\theta).\dot{\theta}$$

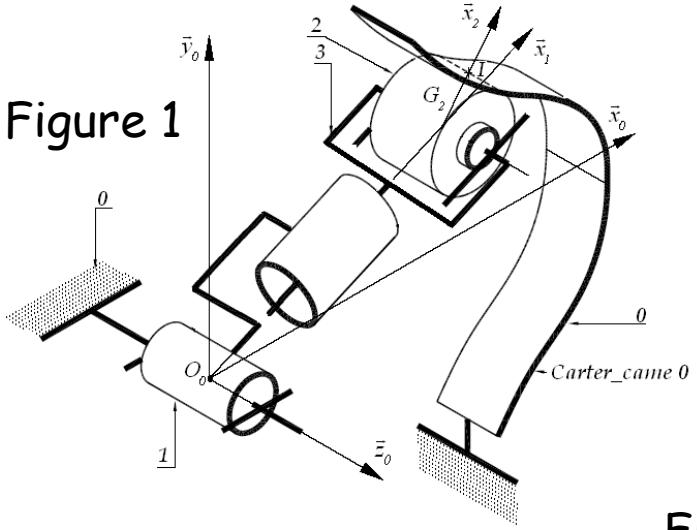
$$\boxed{\dot{\lambda}(t) = \frac{a.(d.\sin\theta - h.cos\theta)}{\sqrt{(d - a.cos\theta)^2 + (h - a.\sin\theta)^2}}.\dot{\theta}}$$

Prof_Affi

Etude d'un moteur hydraulique

Le mécanisme à came fixe transforme la translation des pistons 3 par rapport au bloc-cylindres 1 en rotation de ce même bloc-cylindres 1 par rapport au carter-came 0.

Figure 1



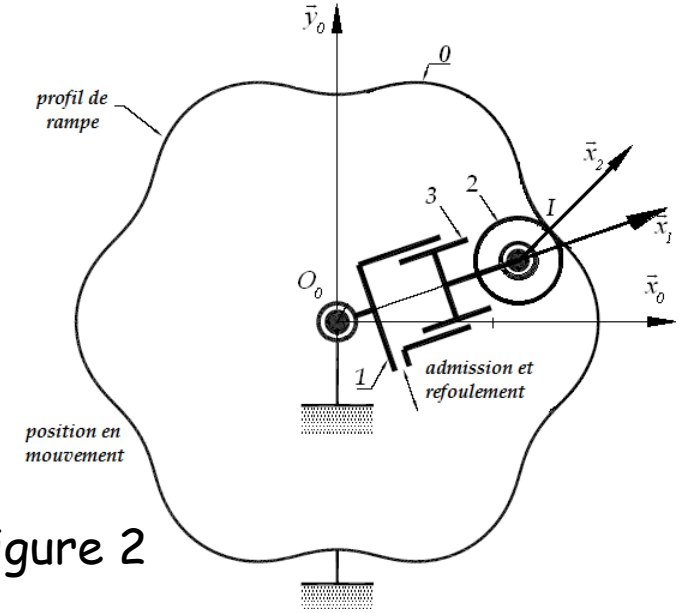


Figure 2

Définition des repères :

$R_0(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ Repère galiléen lié au carter-came 0.

$R_1(O_0; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Repère lié à l'arbre de sortie et au bloc-cylindres 1.

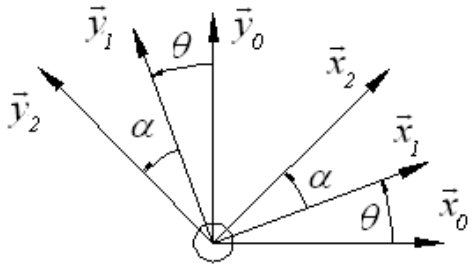
$R_2(G_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ Repère associé à la définition du contact en **I**.

Définition des paramètres géométriques :

$\overrightarrow{O_0G_2} = \rho.\vec{x}_1$ $\qquad$ $\overrightarrow{G_2B} = a.\vec{x}_2$

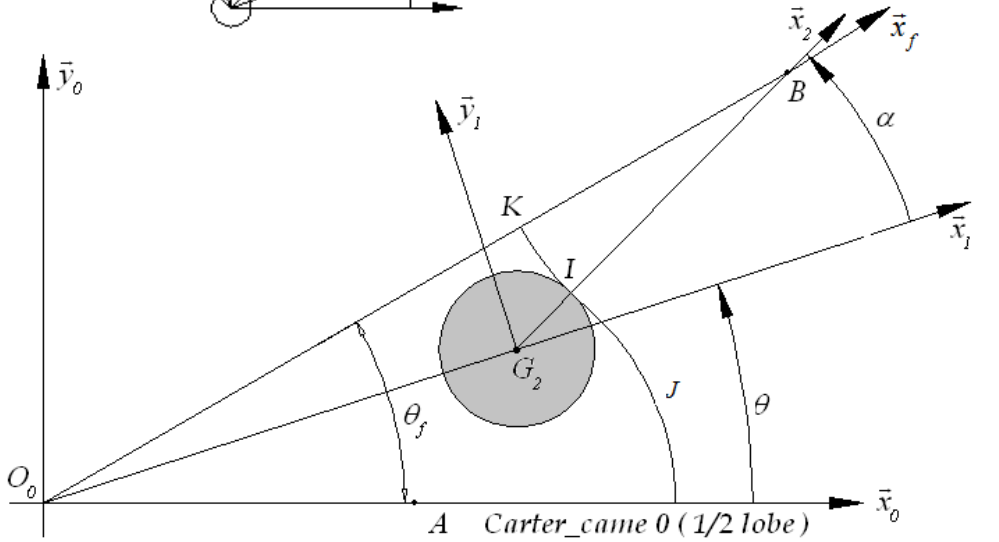
$\overrightarrow{G_2I} = R.\vec{x}_2$ $\qquad$ $\overrightarrow{O_0B} = L.\vec{x}_f$

Le domaine d'étude mécanique pour lequel I appartient à l'arc JK, est défini par $\theta \in [\theta_i = 19{,}9°; \theta_f = 30°]$



$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$

$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \alpha$



- La liaison 1/0 est pivot d'axe $(O_0, \vec{z}_0)$
- La liaison 3/1 est pivot glissant d'axe $(G_2, \vec{x}_1)$
- La liaison 2/3 est pivot d'axe $(G_2, \vec{z}_0)$
- La liaison 2/0 est linéaire rectiligne de normale $(I, \vec{x}_2)$ et de direction $(I, \vec{z}_0)$

Objectif :

Détermination de la relation entre le paramètre cinématique du déplacement du piston 3 et le paramètre cinématique de la rotation de l'arbre de sortie 1.

- Le problème est supposé plan
- On suppose que le galet 2 roule sans glisser sur 0 en *I*.

Q1°- Etablir la relation entre α et θ puis montrer que :

$$\rho = L.\left(\cos(\theta_f - \theta) - \left(\frac{a^2}{L^2} - \sin^2(\theta_f - \theta)\right)^{1/2}\right)$$

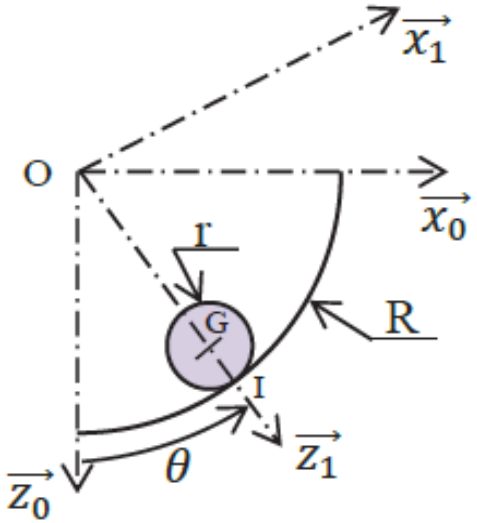
Q2°- Par fermeture cinématique au point G_2, déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ, ρ, θ_f, L, a et $\dot{\rho}$.

Mouvement d'une bille

Une bille de centre de masse G, de rayon r, roule sans glisser sur un rail circulaire (0) de rayon R dans le plan $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Soit I est le point de contact entre la bille et le rail circulaire ; (liaison bille /0 ponctuelle en I). la position du point I sur le rail est repérée par : $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$

On note $\{V(bille/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(bille/0) = \omega_b.\vec{y}_0 \\ \vec{V}(G \in bille/0) = v.\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_G$ le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0 ;



Q1°- En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer ω_b et v, les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de $\dot{\theta}$, r et R.

Prof_Afi

Q1°- Fermeture géométrique

$$\overrightarrow{O_0B} = \overrightarrow{O_0G_2} + \overrightarrow{G_2B} \qquad \Rightarrow L.\vec{x}_f = \rho.\vec{x}_1 + a.\vec{x}_2$$

$$/\vec{x}_1 \Rightarrow L.cos(\theta_f - \theta) = \rho + a.cos\alpha$$

$$/\vec{y}_1 \Rightarrow L.sin(\theta_f - \theta) = a.sin\alpha$$

$$\left(L.cos(\theta_f - \theta) - \rho\right)^2 + \left(L.sin(\theta_f - \theta)\right)^2 = a^2$$

$$\boxed{\rho = L.\left(\cos(\theta_f - \theta) - \left(\frac{a^2}{L^2} - \sin^2(\theta_f - \theta)\right)^{1/2}\right)}$$

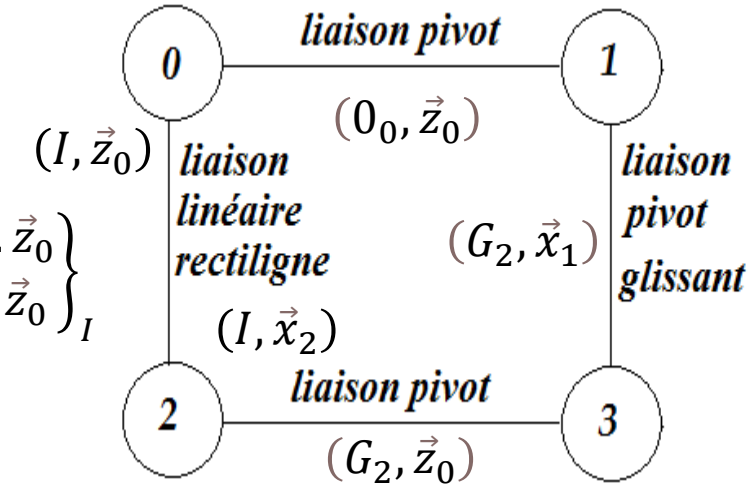
Q2°- Fermeture cinématique en

$$\{V(2/0)\} = \{V(2/3)\} + \{V(3/1)\} + \{V(1/0)\}$$

$$\{V(1/0)\} = \begin{Bmatrix} w_{10}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_0} \qquad \{V(2/3)\} = \begin{Bmatrix} w_{23}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

$$\{V(3/1)\} = \begin{Bmatrix} w_{31}.\vec{x}_1 \\ v_{31}.\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_{G_2}$$

$$\{V(2/0)\} = \begin{Bmatrix} w_{x20}.\vec{x}_2 + w_{z20}.\vec{z}_0 \\ v_{y20}.\vec{y}_2 + v_{z20}.\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{I}$$



Dans le plan (x,y) ces torseur deviennent

$$\{V(3/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{31}.\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_{G_2} \qquad \{V(2/0)\} = \begin{Bmatrix} w_{z20}.\vec{z}_0 \\ v_{y20}.\vec{y}_2 \end{Bmatrix}_{I}$$

R.S.G. en I $\qquad \{V(2/0)\} = \begin{Bmatrix} w_{z20}.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I}$

$$\vec{V}(G_2, 2/0) = \vec{V}(G_2, 2/3) + \vec{V}(G_2, 3/1) + \vec{V}(G_2, 1/0)$$

$$-R.\omega_{20}.\vec{y}_2 = \dot{\rho}.\vec{x}_1 + \rho.\dot{\theta}.\vec{y}_1$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho.\dot{\theta}} = -tan\alpha = -\frac{L.sin(\theta_f - \theta)}{L.cos(\theta_f - \theta) - \rho}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = -\dot{\rho}.\frac{L.cos(\theta_f - \theta) - \rho}{\rho.L.sin(\theta_f - \theta)}}$$

Mouvement d'une bille :

La condition de roulement sans glissement en I entre la bille et le rail (0) donne :

$$\vec{V}(I \in bille/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(G \in bille/0) + \vec{\Omega}(bille/0) \wedge \overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

$$v.\vec{x}_1 + \omega_b.\vec{y}_0 \wedge r.\vec{z}_1 = \vec{0}$$

$/\vec{x}_1$ $\boxed{v + r.\omega_b = 0}$ $\omega_b = -\dfrac{v}{r}$

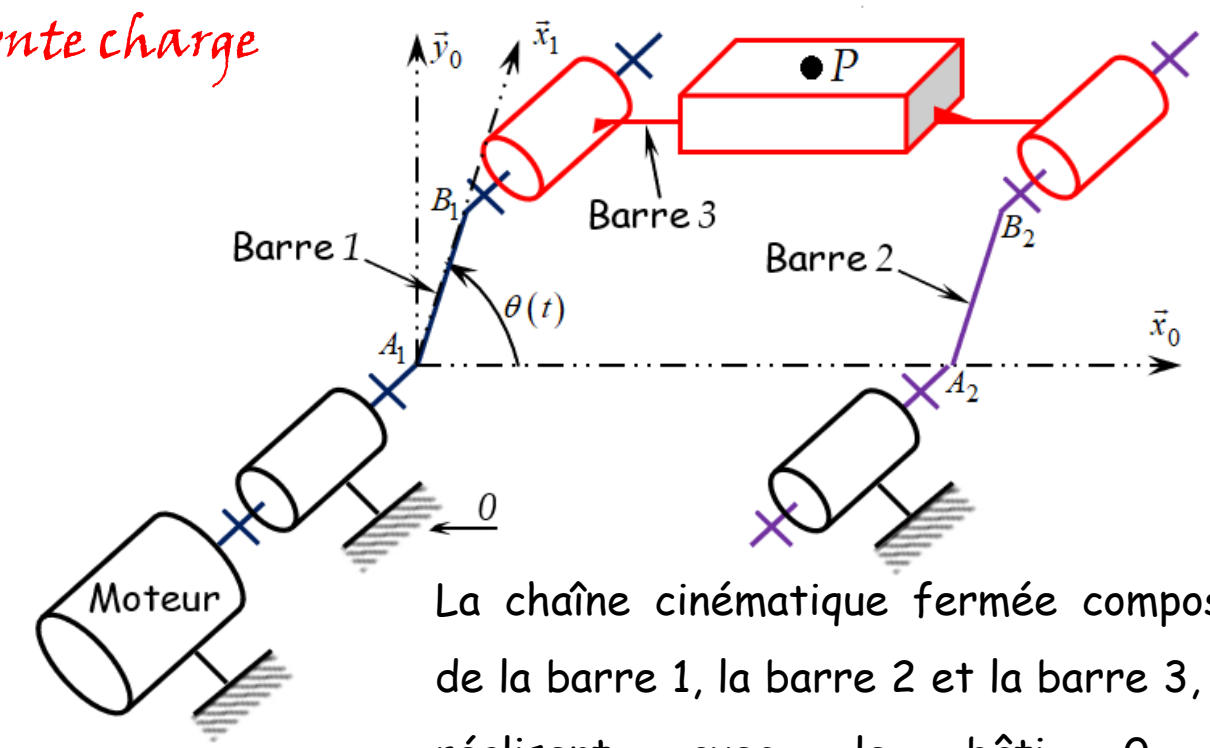
$$\vec{V}(G \in bille/0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_0 = (R-r).\left[\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right]_0$$

$$\vec{V}(G \in bille/0) = (R-r).\dot{\theta}.\vec{x}_1$$

$$\boxed{v = (R-r).\dot{\theta}}$$

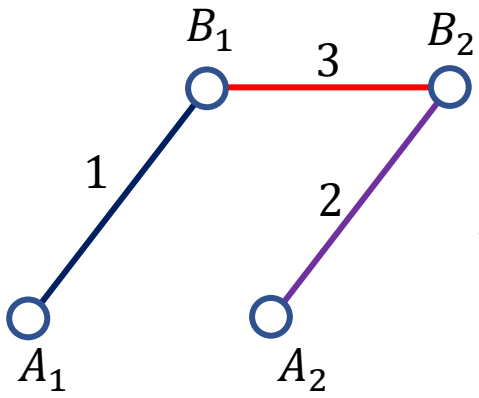
$$\boxed{\omega_b = -\frac{R-r}{r}.\dot{\theta}}$$

Monte charge



La chaîne cinématique fermée composée de la barre 1, la barre 2 et la barre 3, qui réalisent avec le bâti 0 un parallélogramme déformable $(A_1B_1B_2A_2)$, permet d'assujettir la barra 3 à un mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 0. $\Rightarrow \vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$

Le schéma dans le plans devient:



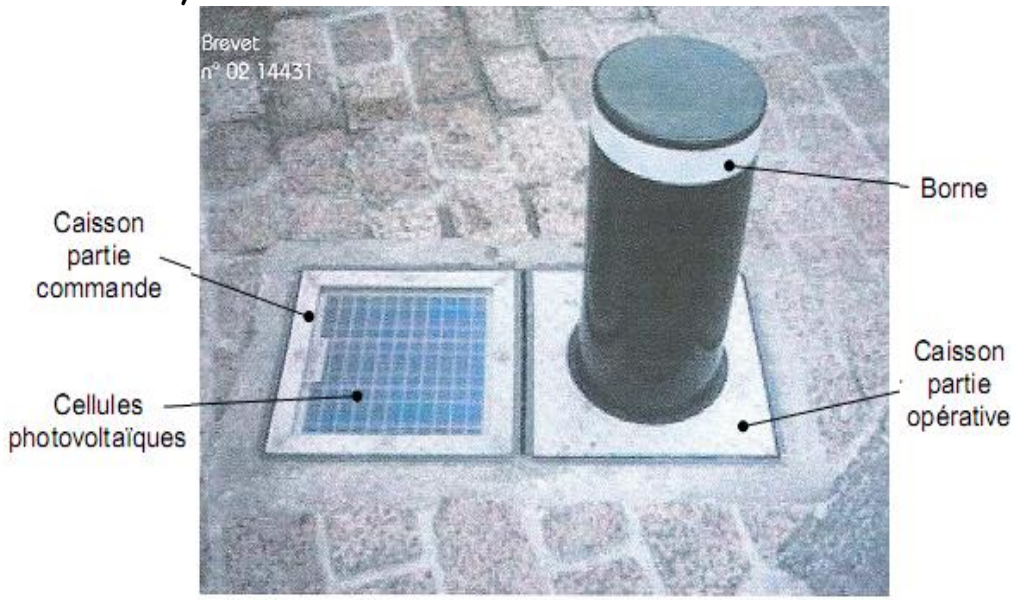
$$\vec{V}(P \in 3/0) = \vec{V}(B_1 \in 3/0) + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{PB_1}$$

$$\boxed{\vec{V}(P \in 3/0) = L.\dot{\theta}.\vec{y}_1}$$

Borne escamotable

Le dispositif étudié est un système permettant de limiter ou d'interdire la circulation dans des zones à accès réservé. Ce dispositif comporte :

- ✓ Un caisson intégrant la partie opérative, à savoir une borne motorisée rétractable dans le sol,



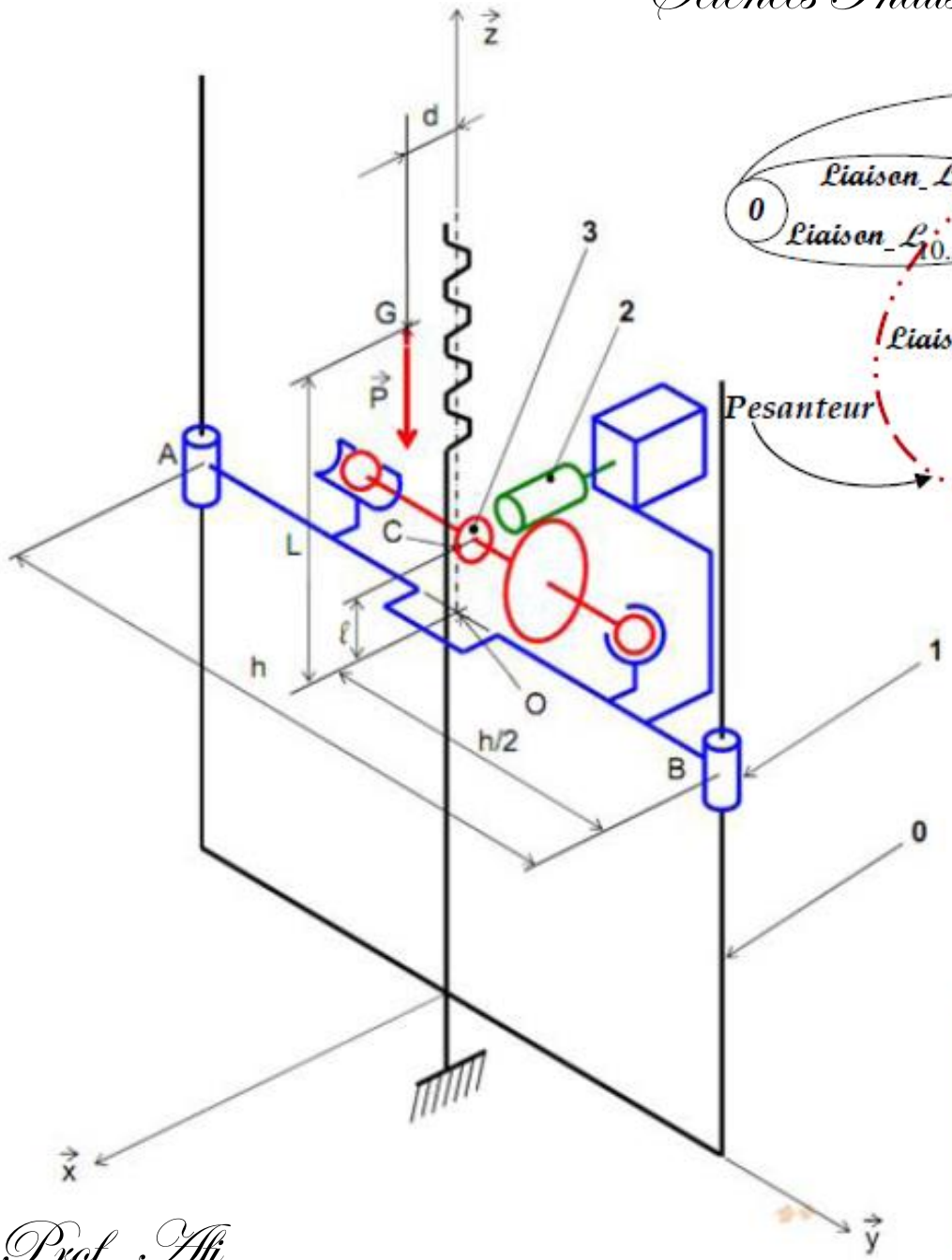
Un caisson intégrant la partie commande comportant :

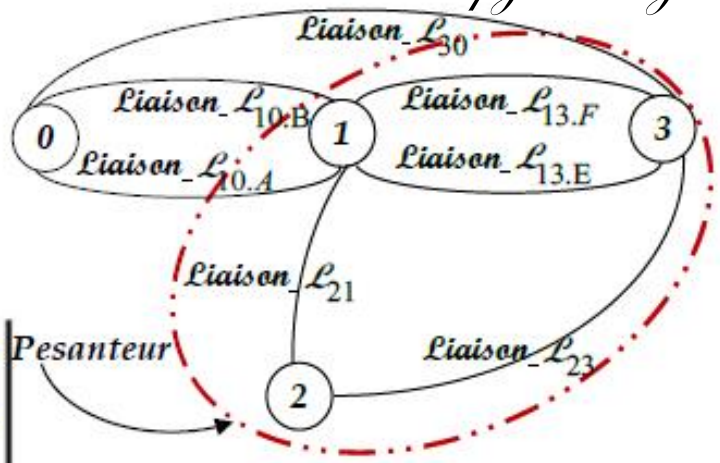
- Une platine électronique de gestion,
- une batterie d'alimentation électrique du système,
- des cellules photovoltaïques assurant la charge de la batterie.

Le guidage en translation rectiligne verticale du chariot supportant la borne par rapport au caisson enterré est représenté sur la figure 1. Ce guidage est réalisé par 2 colonnes parallèles en prise avec 2 paliers ouverts liés au chariot supportant la borne.

Afin de limiter les efforts résistants liés aux frottements dans les guidages en translation du chariot, le constructeur a choisi de placer un contrepoids qui permet de positionner le centre de gravité G de la partie mobile liée au chariot à la distance d de la ligne de référence de la crémaillère.

Dans cette partie, on se propose donc d'étudier la position du contrepoids permettant de minimiser les pertes par frottement dans le guidage du chariot 1 et ainsi augmenter l'autonomie du système.





$(A, \vec{x}, \vec{z})$

$$\overrightarrow{OC} = \ell.\vec{z}$$
$$\overrightarrow{OA} = -\frac{h}{2}.\vec{y}$$
$$\overrightarrow{OB} = \frac{h}{2}.\vec{y}$$
$$\overrightarrow{OG} = d.\vec{x} + L.\vec{z}$$

0 : Bâti (crémaillère)
1 : Chariot
2 : Vis sans fin
3 : Roue (pignon)

Hypothèses :

- On suppose que les résultantes des actions mécaniques transmissibles par les liaisons en A et B sont situées respectivement dans les plans $(A, \vec{x}, \vec{z})$ et $(B, \vec{x}, \vec{z})$.

- Les frottements ne sont pas négligés dans les liaisons pivot glissant en A et B constituant le guidage du chariot par rapport au bâti. On prendra un facteur de frottement f=tan(φ) = 0,22. (Ne pas oublier de préciser les relations entre les composantes des résultantes des actions mécaniques en A et en B en se plaçant à la limite du glissement et uniquement pour la montée du chariot).

Prof_Afi

- Le poids du chariot et de tous les éléments embarqués (motoréducteur, borne, etc.) n'est pas négligé. On considère la masse totale : m = 30 kg et l'accélération de la pesanteur : g = 10 m/s^2. G est le centre de gravité de l'ensemble E.

- L'action mécanique du contact en C est modélisée par le torseur :

$$\{T(0 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{03}.\vec{x} - a.X_{03}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

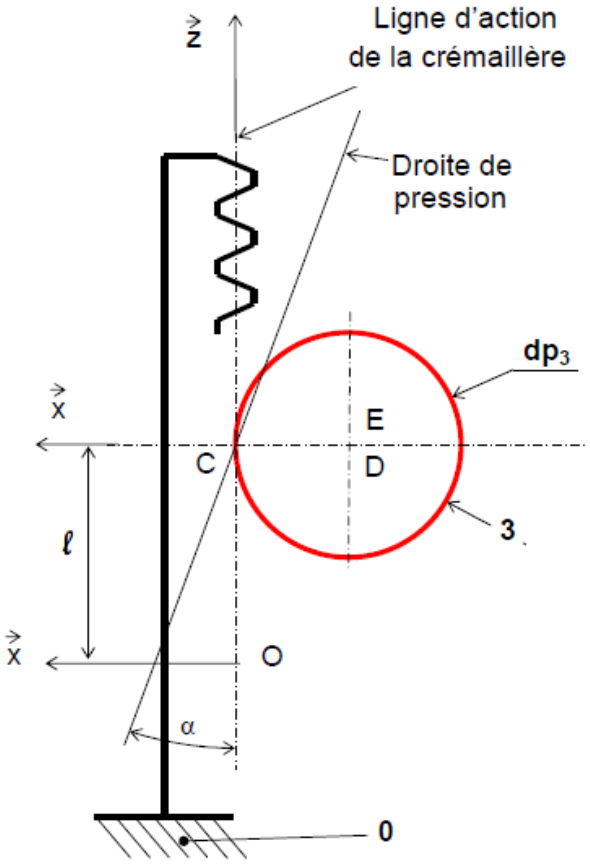
Q1°- A partir de l'isolement de l'ensemble (E=1, 2, 3), effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures. Présenter ce bilan à l'aide des torseurs écrits le plus simplement possible et **en tenant compte des hypothèses** ci-dessus.

Q2°- En se plaçant à la limite du glissement, appliquer, en O, le principe fondamental de la statique à l'ensemble E en équilibre. En déduire les équations scalaires utiles pour la résolution.

- On suppose que les résultantes des actions mécaniques transmissibles par les liaisons en A et B présentent une symétrie par rapport au plan

Q3°- Déterminer la composante du moment dans les liaisons en A et en B uniquement dans le cas de la montée du chariot.

Q4°- Déterminer d en fonction de l, f et a afin d'annuler les moments transmissibles par les liaisons pivot glissant en A et en B dans le cas de la montée du chariot.



Machine-outil

Description et notation

La figure 1 représente le paramétrage du mécanisme. Les moteurs d'axes sont liés par des glissières au bâti R_0, d'axe parallèle à $\overrightarrow{z_0}$.

Les barres b_i , $i \in [1, \dots, 6]$, sont de même longueur et d'extrémités A_i et B_i. Elles sont liées par des rotules tant aux moteurs d'axes mot_j qu'à la platine porte électro-broche.

Les distances des différents points A_i à l'axe $(O_0, \overrightarrow{z_0})$ sont égales entre elles et constantes $\forall t$.

Par construction, on a : $|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{A_3A_4}| = |\overrightarrow{A_5A_6}|$

De même, pour toute configuration, on a les égalités :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2} \qquad \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{B_3B_4} \qquad \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$$

On désigne par $\overrightarrow{v_i}$ le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{A_iB_i}}{|\overrightarrow{A_iB_i}|}$

Les déplacements des moteurs mot_j par rapport à R_0 sont notés $\xi_j.\overrightarrow{z_0}$

L'axe de rotation de l'électro-broche est perpendiculaire au plan de la platine. Les centres des **rotules** $B_1, \dots, B_6$ sont dans le plan de la platine.

Q°-1 En négligeant le poids propre des barres A_iB_i, quelle remarque peut-on faire concernant leur équilibre ?

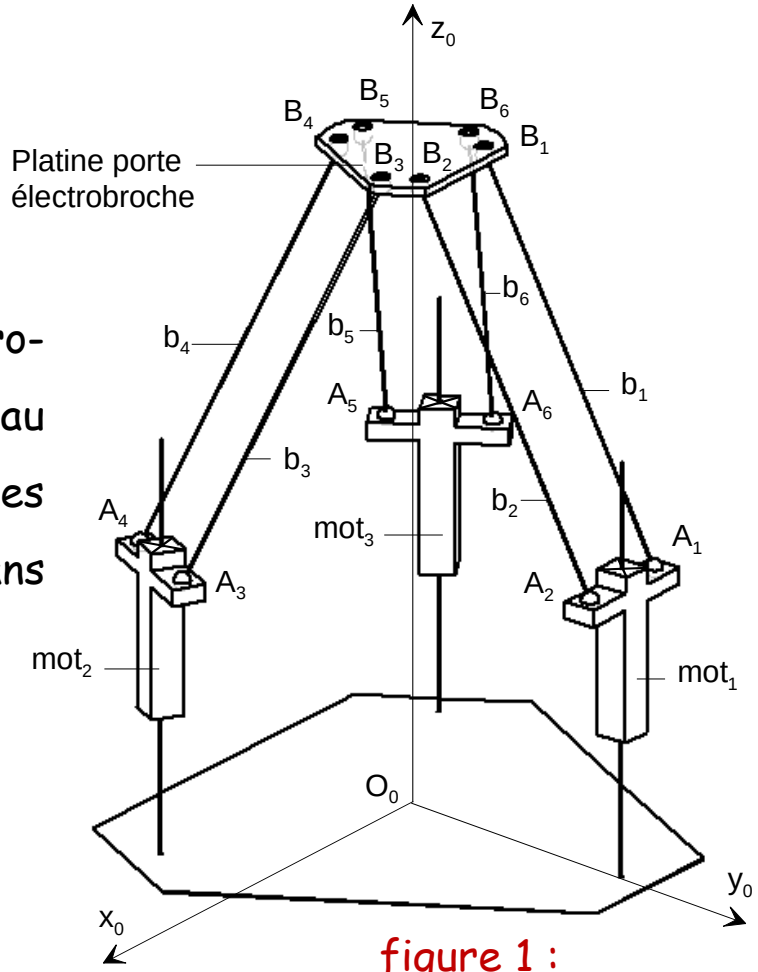


figure 1 :
Paramétrage du mécanisme

On raisonne sur le dispositif en position centrée (il y a une symétrie de répartition de position d'angle), les points A_1,…, A_6 étant dans un même plan perpendiculaire à $\overrightarrow{z_0}$.

On associe à chaque barre A_iB_i un glisseur $\{g_i\}$ de coordonnées : (définition de la direction $\overrightarrow{v_i}$ et la position des points Ai)

$$O_0\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{v_i} = a_i.\overrightarrow{x_0} + b_i.\overrightarrow{y_0} + c_i.\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{O_0A_i} \wedge \overrightarrow{v_i} = l_i.\overrightarrow{x_0} + m_i.\overrightarrow{y_0} + n_i.\overrightarrow{z_0}\end{matrix}\right\}$$

L'outil exerce sur la platine un torseur de forces extérieures de coordonnées : $\{F_{ex}\}$

$$O_0\left\{\begin{matrix}X.\overrightarrow{x_0} + Y.\overrightarrow{y_0} + Z.\overrightarrow{z_0} \\ L.\overrightarrow{x_0} + M.\overrightarrow{y_0} + N.\overrightarrow{z_0}\end{matrix}\right\}$$

On désigne par $B_i\left\{\begin{matrix}N_i.\overrightarrow{v_i} \\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}$ les coordonnées de l'action de la barre A_iB_i sur la platine porte électro-broche.

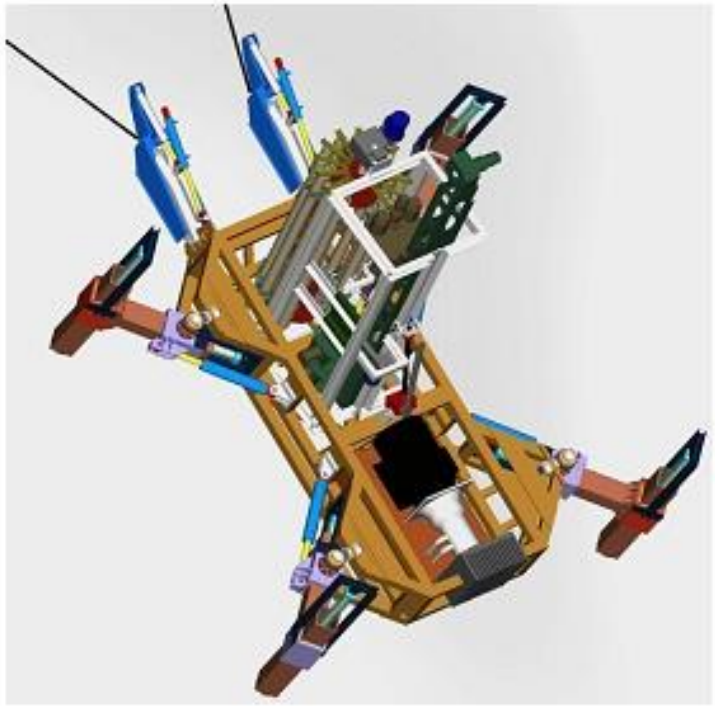
Q°-2 Ecrire les conséquences scalaires de l'équilibre de la platine au point O_0.

Q°-3 Quelle condition doivent vérifier les grandeurs a_i, b_i, c_i, l_i, m_i, n_i pour que les N_i soient déterminables ?

Roboclimber

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au dessus des routes ou des zones habitées.

une unité autonome de forage et de pose des pieux. Il utilise pour se mouvoir et assurer son équilibre lors du forage 4 pieds indépendants, ainsi que deux câbles de traction fixés en hauteur.



Le forage proprement dit consiste à enfoncer dans le sol ou la roche une succession de tubes en acier, vissés les uns aux autres, qui constituent le train de forage. Le premier tube utilisé se retrouve en tête de train et possède une tête perforante.

L'enfoncement de l'ensemble du train est obtenu par l'action conjuguée d'un effort de poussée suivant l'axe de forage et d'un couple qui met en rotation le train de tubes. Les critères géotechniques retenus pour obtenir une plage d'utilisation optimale sont précisée dans l'extrait du cahier des charges ci-dessous :

Fonction	**Critères**	**Niveaux**
Enfoncer les tubes de forage dans la paroi	Force de poussée maxi	Pour une pente de 45° : F>10000 N Pour une pente de 80° : F>3000 N

Problématique : Une des difficultés liées à l'utilisation d'une plateforme mobile pour réaliser le forage réside dans l'application de l'effort de poussée qui doit être obtenu sans mettre en péril l'équilibre de la plateforme. On souhaite vérifier que le robot pourra bien fournir l'effort de poussée préconisé dans le cahier des charges.

On suppose le robot en équilibre dans la position de la figure 1 (vue de profil du robot sur la paroi).

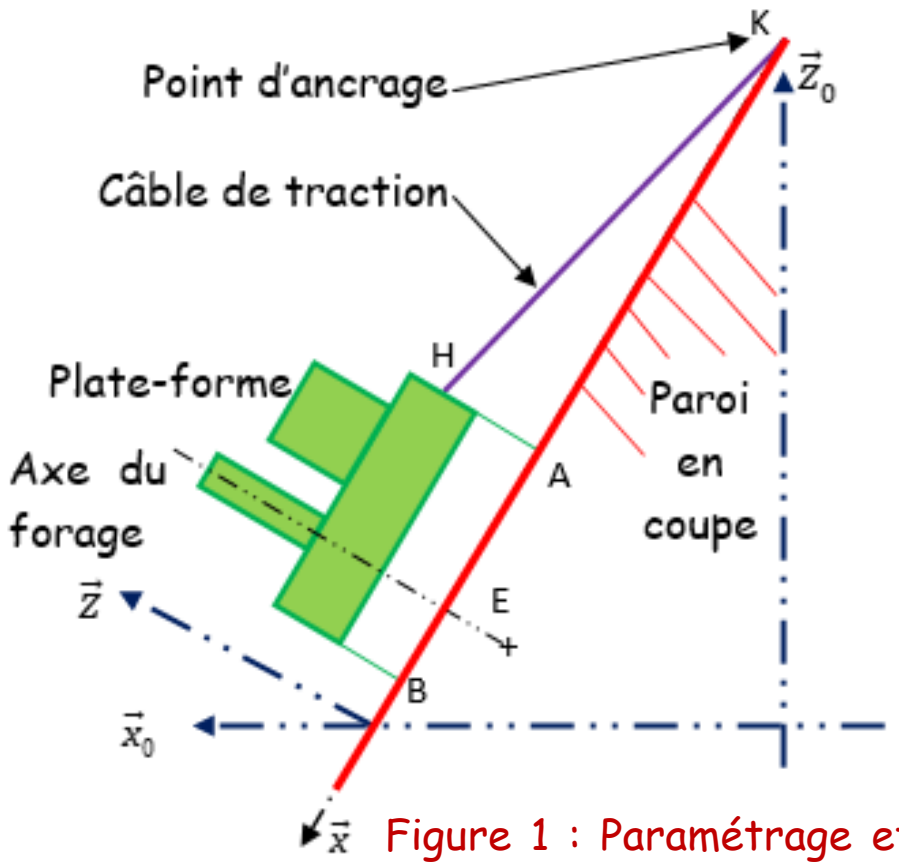


Figure 1 : Paramétrage et vue de profil du robot sur la paroi

Hypothèses :

- ✓ Le problème est supposé plan, dans le plan de la figure 1 : $(G, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$
- ✓ La pente de la paroi est définie par l'angle $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{z}_0, \vec{z})$
- ✓ Les quatre contacts pied / paroi sont réduits à deux contacts ponctuels en A et B, on a $\overrightarrow{AB} = d.\vec{x}$ et $\overrightarrow{BH} = -d.\vec{x} + h.\vec{z}$.
- ✓ Les deux câbles sont assimilés à un seul, fixé en H au robot et en K à la paroi : $\overrightarrow{KH} = e.\vec{x} + h.\vec{z}$ ou « e », distance du robot au point d'ancrage le long de la paroi, sera prise à sa valeur minimale autorisée $e = 2.d$.
- ✓ Le poids de la plateforme et des tubes est modélisé par le glisseur : $\begin{Bmatrix} -P.\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$ avec $P = 28000(N)$ et G tel que

$$\overrightarrow{BG} = -\frac{d}{2}.\vec{x} + h.\vec{z}$$

- ✓ Les contacts pied / paroi sont sans frottement.
- ✓ L'effort de poussée de la foreuse impose sur le train de tubes une réaction du sol modélisée par un glisseur en E : $\begin{Bmatrix} F.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$. Le point E est défini par $\overrightarrow{BE} = -\frac{d}{3}.\vec{x} - p.\vec{z}$.

Question : En considérant l'équilibre statique de l'ensemble {plateforme + tubes}, écrire l'équation des moments au point H. en déduire la condition littérale sur F pour qu'il n'y ait pas

Borne escamotable

Q1°- On isole l'ensemble E

Le B.A.M.E.

- Liaisons pivots glissantes entre 0 et 1 :

$$\left\{T\left(0\overset{LA}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & M_A\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\left\{T\left(0\overset{LB}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_B & L_B\\ Y_B & M_B\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{B,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

On suppose que les résultantes des actions mécaniques transmissibles par les liaisons en A et B sont situées respectivement dans les plans $(A,\vec{x},\vec{z})$ et $(B,\vec{x},\vec{z})$.

$$\left\{T\left(0\overset{LA}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_A & 0\\ 0 & M_A\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\left\{T\left(0\overset{LB}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_B & 0\\ 0 & M_B\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{B,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

Les frottements ne sont pas négligés dans les liaisons pivot glissant en A et B

Le mouvement du chariot est une translation rectiligne verticale dans le sens de la montée.

$$\left\{T\left(0\overset{LA}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_A & 0\\ 0 & M_A\\ T_A & 0\end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$T_A=-f.X_A$$

$$\left\{T\left(0\overset{LB}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_B & 0\\ 0 & M_B\\ T_B & 0\end{Bmatrix}_{B,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$T_B=-f.X_B$$

- Action de la pesanteur : $\{T\ \ pes\rightarrow E\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -m.g & 0\end{Bmatrix}_{G,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$

- Action de la crémaillère sur le pignon de 3 : $\{T(0\rightarrow 3)\}=\begin{Bmatrix}X_{03}.\vec{x}-a.X_{03}.\vec{z}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_C$

Q2°- On isole l'ensemble E

On applique le P.F.S. au point O : $\{T(\bar{E}\rightarrow E)\}=\{0\}$

$$\left\{T\left(0\overset{L_A}{\rightarrow}1\right)\right\}+\left\{T\left(0\overset{L_B}{\rightarrow}1\right)\right\}+\{T(0\rightarrow 3)\}+\left\{T\left(pes\rightarrow E\right)\right\}=\{0\}$$

$$\vec{M}\left(O,0\overset{LA}{\rightarrow}1\right)=\vec{M}\left(A,0\overset{LA}{\rightarrow}1\right)+\overrightarrow{OA}\wedge\vec{R}\left(0\overset{LA}{\rightarrow}1\right)$$

$$=\vec{M}\left(A,0\overset{LA}{\rightarrow}1\right)+\left(-\frac{h}{2}.\vec{y}\right)\wedge(X_A.\vec{x}+T_A.\vec{z})$$

$$=-\frac{h}{2}.T_A.\vec{x}+M_A.\vec{y}+\frac{h}{2}.X_A.\vec{z}$$

$$\left\{T\left(0\overset{L_A}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_A & -\frac{h}{2}.T_A\\ 0 & M_A\\ T_A & \frac{h}{2}.X_A\end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\vec{M}\left(O,0\overset{LB}{\rightarrow}1\right)=\vec{M}\left(B,0\overset{LB}{\rightarrow}1\right)+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{R}\left(0\overset{LB}{\rightarrow}1\right)$$

$$\left\{T\left(0\overset{L_B}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_B & +\frac{h}{2}.T_B\\ 0 & M_B\\ T_B & -\frac{h}{2}.X_B\end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\vec{M}(O,0\rightarrow3)=\vec{M}(C,0\rightarrow3)+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{R}(0\rightarrow3)$$

$$=\vec{0}+l.\vec{z}\wedge(X_{03}.\vec{x}-a.X_{03}.\vec{z})=l.X_{03}.\vec{y}$$

$$\left\{T\left(0\overset{L_A}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}X_{03} & 0\\ 0 & l.X_{03}\\ -a.X_{03} & 0\end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\vec{M}(O,pes\rightarrow E)=\vec{M}(G,pes\rightarrow E)+\overrightarrow{OG}\wedge\vec{R}(pes\rightarrow E)$$

$$\left\{T\left(0\overset{L_A}{\rightarrow}1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & d.m.g\\ -m.g & 0\end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}X_B+X_A+X_{03}=0\\ 0=0\\ T_B+T_A-a.X_{03}-m.g=0\\ \frac{h}{2}.T_B-\frac{h}{2}.T_A=0\\ M_B+M_A+l.X_{03}+d.m.g=0\\ \frac{h}{2}.X_A-\frac{h}{2}.X_B=0\end{gathered}}$$

Q3°-

$$M_B=M_A=M_{01}$$

$$2.M_{01}=-(l.X_{03}+d.m.g)$$

$$X_{03}=-(X_B+X_A)$$

$$T_B+T_A=-f.(X_B+X_A)$$
$$=f.X_{03}=-a.X_{03}-m.g$$

Q4°-

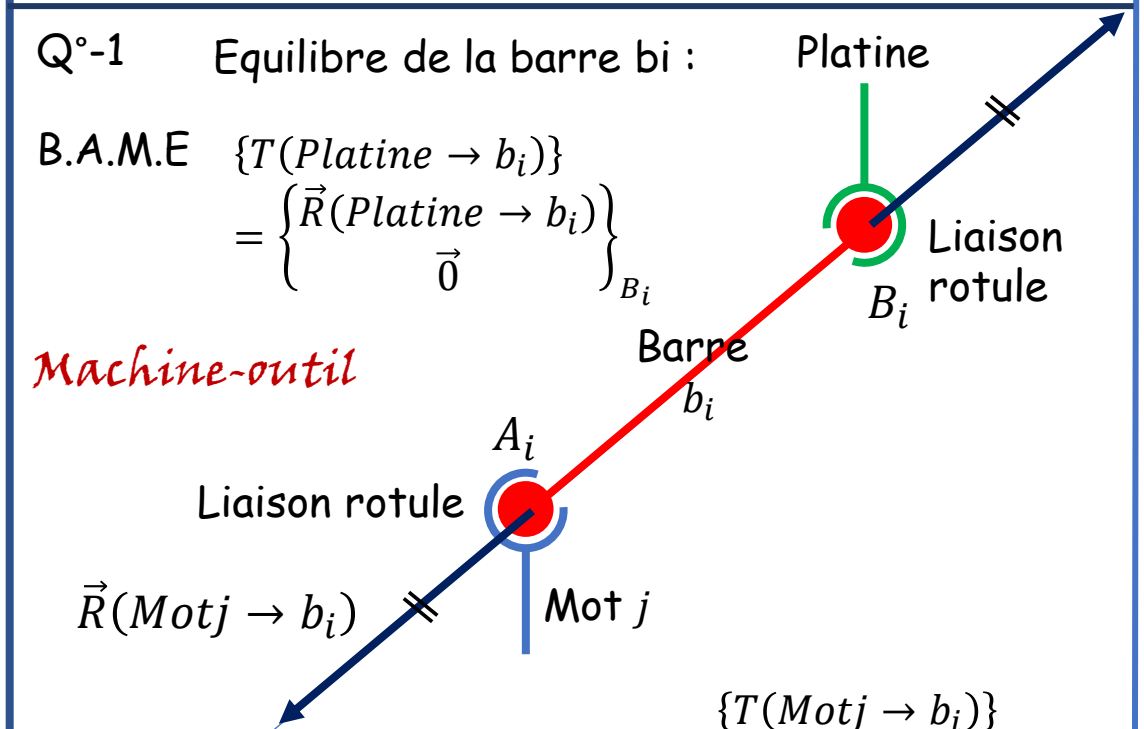
$$2.M_{01}=0$$

$$\boxed{d=\frac{l}{f+a}}$$

$$\boxed{2.M_{01}=\left(d-\frac{l}{f+a}\right).m.g}$$

Q°-1 Equilibre de la barre bi :

B.A.M.E $\{T(Platine \to b_i)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(Platine \to b_i) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{B_i}$



$\{T(Motj \to b_i)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(Motj \to b_i) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_i}$

Directions:

$\Delta\vec{R}(Platine \to b_i) = \Delta\vec{R}(Motj \to b_i)$

La barre bi est en équilibre sous l'action de deux glisseurs. Ces deux glisseurs ont :

- ✓ La même direction (droite A_iB_i)
- ✓ La même norme
- ✓ Des sens contraires.

Prof_Afi

Q°-2 Equilibre de la platine :

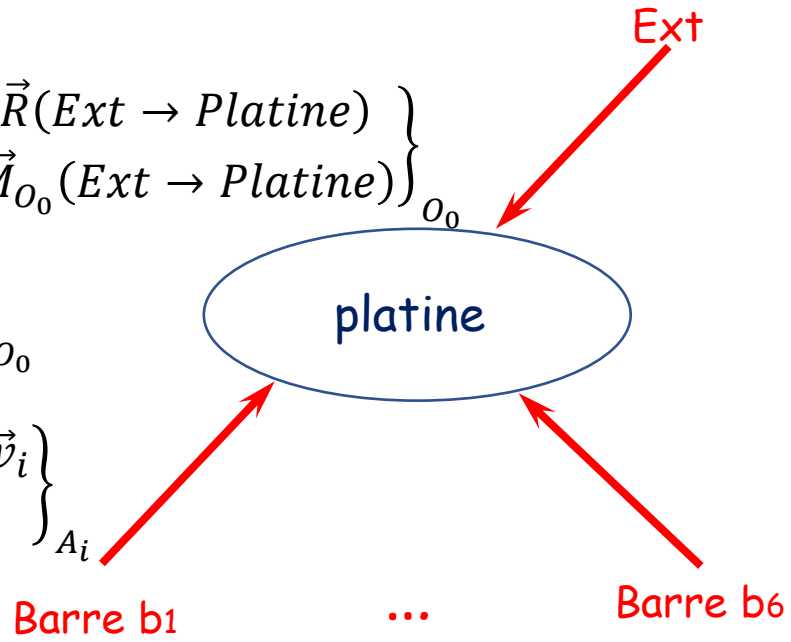
Le P.F.S. en O0 s'écrit : $\{T(\overline{Platine} \to Platine)\} = \{0\}$

B.A.M.E

$$\{T(Ext \to Platine)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(Ext \to Platine) \\ \vec{M}_{O_0}(Ext \to Platine) \end{Bmatrix}_{O_0}$$

$$= \begin{Bmatrix} X.\vec{x}_0 + Y.\vec{y}_0 + Z.\vec{z}_0 \\ L.\vec{x}_0 + M.\vec{y}_0 + N.\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{O_0}$$

$$\{T(b_i \to Platine)\} = \begin{Bmatrix} N_i.\vec{v}_i \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_i}$$



$$\{T(b_i \to Platine)\} = \begin{Bmatrix} N_i.\vec{v}_i \\ \overrightarrow{O_0A_i} \wedge N_i.\vec{v}_i \end{Bmatrix}_{O_0} = N_i.\{g_i\}$$

$$\{T(Ext \to Platine)\} + \sum_{i=1}^{6} \{T(b_i \to Platine)\} = \{0\}$$

$$\vec{M}_{O_0}(b_i \to Platine) = \vec{M}_{A_i}(b_i \to Platine) + \vec{R}(b_i \to Platine) \wedge \overrightarrow{O_iA_i}$$

$$\{g_i\} = \begin{Bmatrix} \vec{v}_i \\ \overrightarrow{O_0A_i} \wedge \vec{v}_i \end{Bmatrix}_{O_0} = \begin{Bmatrix} a_i.\vec{x}_0 + b_i.\vec{y}_0 + c_i.\vec{z}_0 \\ l_i.\vec{x}_0 + m_i.\vec{y}_0 + n_i.\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{O_0}$$

a_i, b_i, c_i, l_i, m_i et n_i

dépendent des données géométriques (connues)

$$\{T(Ext \rightarrow Platine)\} = \begin{Bmatrix} X.\vec{x}_0 + Y.\vec{y}_0 + Z.\vec{z}_0 \\ L.\vec{x}_0 + M.\vec{y}_0 + N.\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{O_0}$$

Actions mécaniques extérieures connues

Le T.RS. :

$$\vec{R}(Ext \rightarrow Platine) + \sum_{i=1}^{6} N_i.\vec{v}_i = \vec{0}$$

Le T.MS. en O_0 :

$$\vec{M}_{O_0}(b_i \rightarrow Platine) + \sum_{i=1}^{6} N_i.\left(\overrightarrow{O_0A_i} \wedge \vec{v}_i\right) = \vec{0}$$

$$X + \sum_{i=1}^{6} a_i\,.N_i = 0 \qquad L + \sum_{i=1}^{6} l_i\,.N_i = 0$$

$$Y + \sum_{i=1}^{6} b_i\,.N_i = 0 \qquad M + \sum_{i=1}^{6} m_i\,.N_i = 0$$

$$Z + \sum_{i=1}^{6} c_i\,.N_i = 0 \qquad N + \sum_{i=1}^{6} n_i\,.N_i = 0$$

Un système de six équations statiques

Pour six Inconnues Statiques (N_i)

La résolution est possible si les six équations sont indépendantes

⇒ Si le déterminant de la matrice (6x6) des a_i, b_i, c_i, l_i, m_i et n_i est différent de 0.

Roboclimber

L'ensemble Σ {plate forme étant supposé en équilibre dans le référentiel terrestre galiléen, le bilan des actions mécaniques étant fourni dans l'énoncé, on projette l'équation du moment statique appliqué à au point H sur la direction $\vec{y}_0$.

$$\left(\overrightarrow{HG} \wedge -P \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{HA} \wedge N_A \cdot \vec{z} + \overrightarrow{HB} \wedge N_B \cdot \vec{z} + \overrightarrow{HE} \wedge F \cdot \vec{z}\right).\vec{y}_0 = 0$$

Condition de non décollement en B $\quad N_B > 0$

$$\frac{d}{2}.P.\cos\alpha - d.N_B - \frac{2.d}{3}.F = 0$$

$$F < \frac{3}{4}.P.\cos\alpha$$

Sciences Industrielles pour l'ingénieur

Cpge Tanger

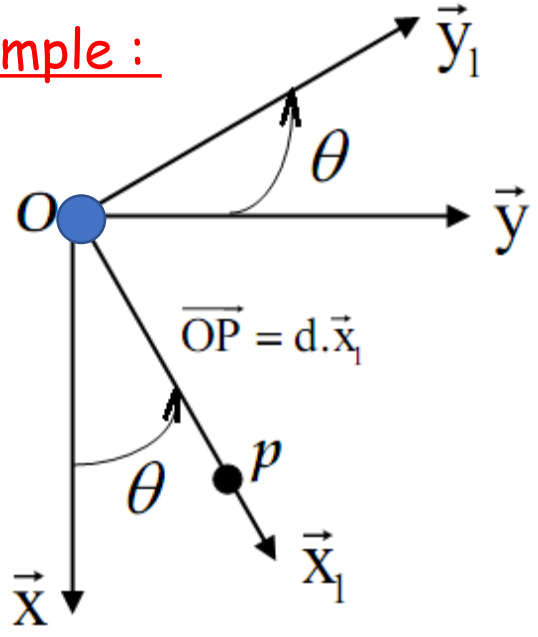
Cinétique

- Mécanique 3
Mécanique du solide indéformable
Cinétique Dynamique
Edition ellipse

- Mécanique du solide
Applications industrielles
Edition Dunod

Prof_Afi

Pendule simple :



On cherche à déterminer l'équation différentielle de mouvement:

Quantité de mouvement :

$$m.\vec{V}(P/R)$$

Moment cinétique en O :

$$\vec{L}_O(P/R) = \overrightarrow{OP} \wedge m.\vec{V}(P/R)$$

Théorème de la résultante cinétique : $\Sigma(\vec{F}_{EXT}) = m.\vec{a}(P/R)$

Théorème du moment cinétique en O : $\Sigma M_O(\vec{F}_{EXT}) = \left(\frac{d}{dt}\vec{L}_O(P/R)\right)_R$

$$\vec{V}(P/R) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}|_R = d.\dot{\theta}.\vec{y}_1 \qquad \vec{L}_O(P/R) = m.d^2.\dot{\theta}.\vec{z}$$

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{T} = \vec{0} \qquad \vec{M}_O(\vec{P}_d) = \overrightarrow{OP} \wedge m.g.\vec{x} = -m.d.g.Sin\theta.\vec{z}$$

Equation de mouvement : $-\mathrm{m}.d.g.Sin\theta = \mathrm{m}.d^2.\ddot{\theta}$

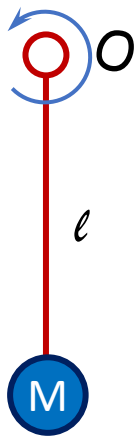
L'équation peut s'écrire sous la forme : $C = J_\Delta.\ddot{\theta}$

Le J_Δ défini le moment d'inertie du point M par rapport à l'axe $O,\vec{z}$ $\quad J_\Delta = J_{O,\vec{z}} = m.d^2$

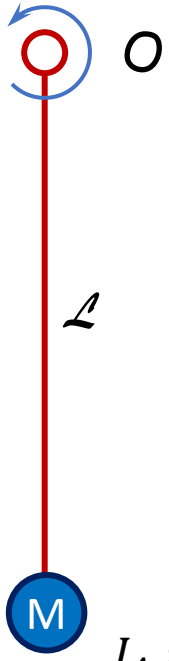
Moment d'inertie d'une masse ponctuelle :

Par définition le moment d'inertie J_Δ, par rapport à un axe(Δ), d'un point matériel de masse m située à une distance d de (Δ) est : $J_\Delta = m.d^2$

Le moment d'inertie quantifie la résistance d'un corps soumis à une mise en rotation.



$J_\Delta = M.l^2$

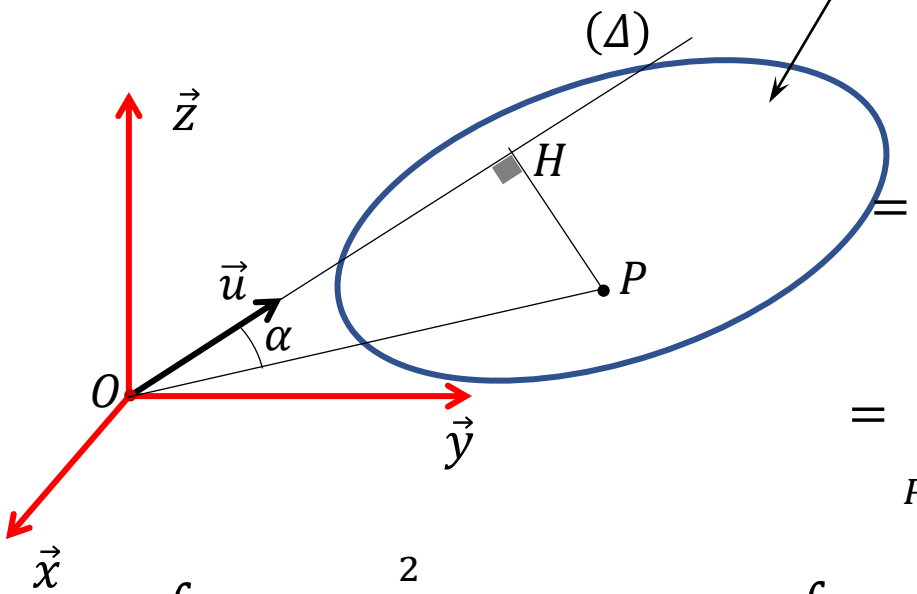


$J_\Delta = M.L^2$

Dans le cas d'un corps solide constitué d'une infinité de points matériels :

$$J_\Delta = I_{O,\vec{u}}(S) = \int d^2.dm$$

On cherche à avoir une expression du moment d'inertie $I_{O,\vec{u}}(S)$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{u}$.



$$J_\Delta(S) = \int_{P\in S} \left[\overrightarrow{PH}\right]^2 .dm$$

$$= \int_{P\in S} \left[\|\overrightarrow{OP}\|.Sin\alpha\right]^2 .dm$$

$$= \int_{P\in S} \left[\|\overrightarrow{OP}\|.\|\vec{u}\|.Sin\alpha\right]^2 .dm$$

$$= \int_{P\in S} \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right]^2 .dm \qquad = \int_{P\in S} \left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right].\left[\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right].dm$$

$$= \int_{P\in S} \vec{u}.\left[\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right].dm \qquad J_\Delta(S) = \vec{u}.\int_{P\in S} \left[\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right].dm$$

On défini l'opérateur d'inertie d'un solide :

$$\vec{J}_O(S,\vec{u}) = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right).dm$$

L'expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque devient :

$$I_{O,\vec{u}}(S) = \vec{u}.\vec{J}_O(S,\vec{u})$$

On considère un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ associé au solide S. La position de tout point P du solide S est donné par le vecteur

$$\overrightarrow{OP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

On cherche à appliquer l'opérateur d'inertie au axes du repère R.

$$I_{O,\vec{x}}(S) = \vec{x}.\vec{J}_O(S,\vec{x})$$

$$= \vec{x}.\int_{P\in S}\left(\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{x}\wedge\overrightarrow{OP}\right)\right).dm$$

$$\vec{J}_O(S,\vec{x}) = \int_{P\in S}\left(\overrightarrow{OP}\wedge\left(\vec{x}\wedge\overrightarrow{OP}\right)\right).dm$$

$$= \int_{P\in S}\left(\left(\overrightarrow{OP}\right)^2.\vec{x} - \left(\overrightarrow{OP}.\vec{x}\right).\overrightarrow{OP}\right).dm$$

$$= \int_{P\in S}\left((x^2+y^2+z^2).\vec{x} - x.\overrightarrow{OP}\right).dm$$

$$= \int_{P\in S}\left((x^2+y^2+z^2).\vec{x} - x^2.\vec{x} - x.y.\vec{y} - x.z.\vec{z}\right).dm$$

$$= \int_{P\in S}\left((y^2+z^2).\vec{x} - x.y.\vec{y} - x.z.\vec{z}\right).dm$$

$$\vec{J}_O(S,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm \\ -\int_S x.y.dm \\ -\int_S z.x.dm \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

En reprenant les mêmes étapes on peut déduire $\vec{J}_O(S,\vec{y})$ et $\vec{J}_O(S,\vec{z})$. On trouve :

$$\vec{J}_O(S,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm \\ -\int_S x.y.dm \\ -\int_S z.x.dm \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \qquad \vec{J}_O(S,\vec{y}) = \begin{pmatrix} -\int_S x.y.dm \\ \int_S (x^2+z^2).dm \\ -\int_S y.z.dm \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \qquad \vec{J}_O(S,\vec{z}) = \begin{pmatrix} -\int_S x.z.dm \\ -\int_S y.z.dm \\ \int_S (x^2+y^2).dm \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

L'opérateur d'inertie étant linéaire, il est représentable par une matrice, appelée matrice d'inertie du solide (S) , au point O, dans une base donnée, notée $I_O(S)$ (ou $\bar{\bar{I}}_O(S)$)

L'expression de l'opérateur d'inertie devient :

$$\vec{J}_O(S,\vec{u}) = \begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S x.y.dm & -\int_S x.z.dm \\ -\int_S x.y.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S y.z.dm \\ -\int_S z.x.dm & -\int_S y.z.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} .\vec{u}$$

Cinétique

Opérateur d'inertie d'un solide :

$$\vec{J}_O(S,\vec{u}) = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right).dm$$

L'opérateur d'inertie étant linéaire, il est représentable par une matrice, appelée matrice d'inertie du solide (S) , au point O, dans une base donnée, notée $I_O(S)$ (ou $\bar{\bar{I}}_O(S)$)

On aura donc : $\vec{J}_O(S,\vec{u}) = I_O(S).\vec{u}$

Matrice d'inertie :

La matrice d'inertie caractérise la répartition de la masse d'un solide (S) par rapport aux AXES et aux PLANS d'un repère lié au solide.

$$\begin{array}{ccc} \vec{J}_O(S,\vec{x}) & \vec{J}_O(S,\vec{y}) & \vec{J}_O(S,\vec{z}) \end{array}$$

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

O : un point du solide

Une base liée au solide

La matrice d'inertie du solide (S) caractérise :

- La répartition de la masse du solide (S) par rapport aux AXES d'un repère lié au solide.

  ⇒ Les moments d'inertie A, B et C

- La répartition de la masse du solide (S) par rapport aux PLANS d'un repère lié au solide.

  ⇒ Les produits d'inertie D, E et F

Les moments d'inertie :

$$\overrightarrow{OP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

$$A = I_{Ox}(S) = \int_S (y^2 + z^2).dm$$

$$B = I_{Oy}(S) = \int_S (x^2 + z^2).dm$$

$$C = I_{OZ}(S) = \int_S (x^2 + y^2).dm$$

Les produits d'inertie :

$$D = I_{Oyz} = \int_S y.z.dm$$

$$E = I_{Ozx} = \int_S z.x.dm$$

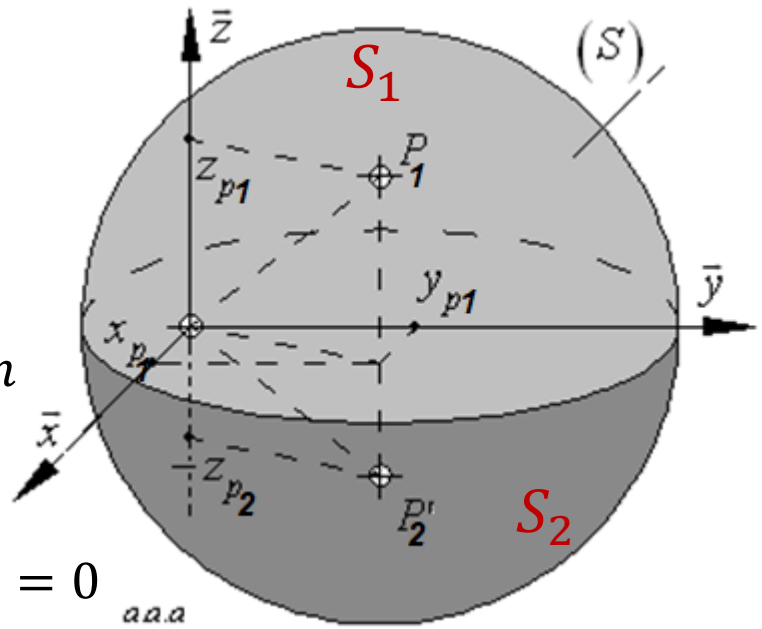
$$F = I_{Oxy} = \int_S x.y.dm$$

Influence des symétries matérielles :

- Symétrie géométrique &
- Symétrie de répartition de masse

On suppose qu' un solide (S) admet un seul plan de symétrie matérielle.

Plan de symétrie : $(O, \vec{x}, \vec{y})$



$$D = \int_{P \in S} y.z.dm$$

$$= \int_{P_1 \in S_1} y_{P1}.z_{P1}.dm + \int_{P_2 \in S_2} y_{P2}.z_{P2}.dm$$

$$D = \int y_{P1}.z_{P1}.dm + \int y_{P1}.(-z_{P1}).dm = 0$$

$$E = \int_{P \in S} x.z.dm = 0$$

$$\boxed{I_O(S) = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{P1} &= x_{P2} \\ y_{P1} &= y_{P2} \\ z_{P2} &= -z_{P1} \end{aligned}}$$

Les produits d'inertie qui font apparaître dans leur expression, la coordonnée correspondant à la normale au plan de symétrie sont nuls.

L'axe perpendiculaire au plan de symétrie est un axe principal d'inertie.

Plan de symétrie :

$(O,\vec{x},\vec{y})$

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Plan de symétrie :

$(O,\vec{x},\vec{z})$

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Plan de symétrie :

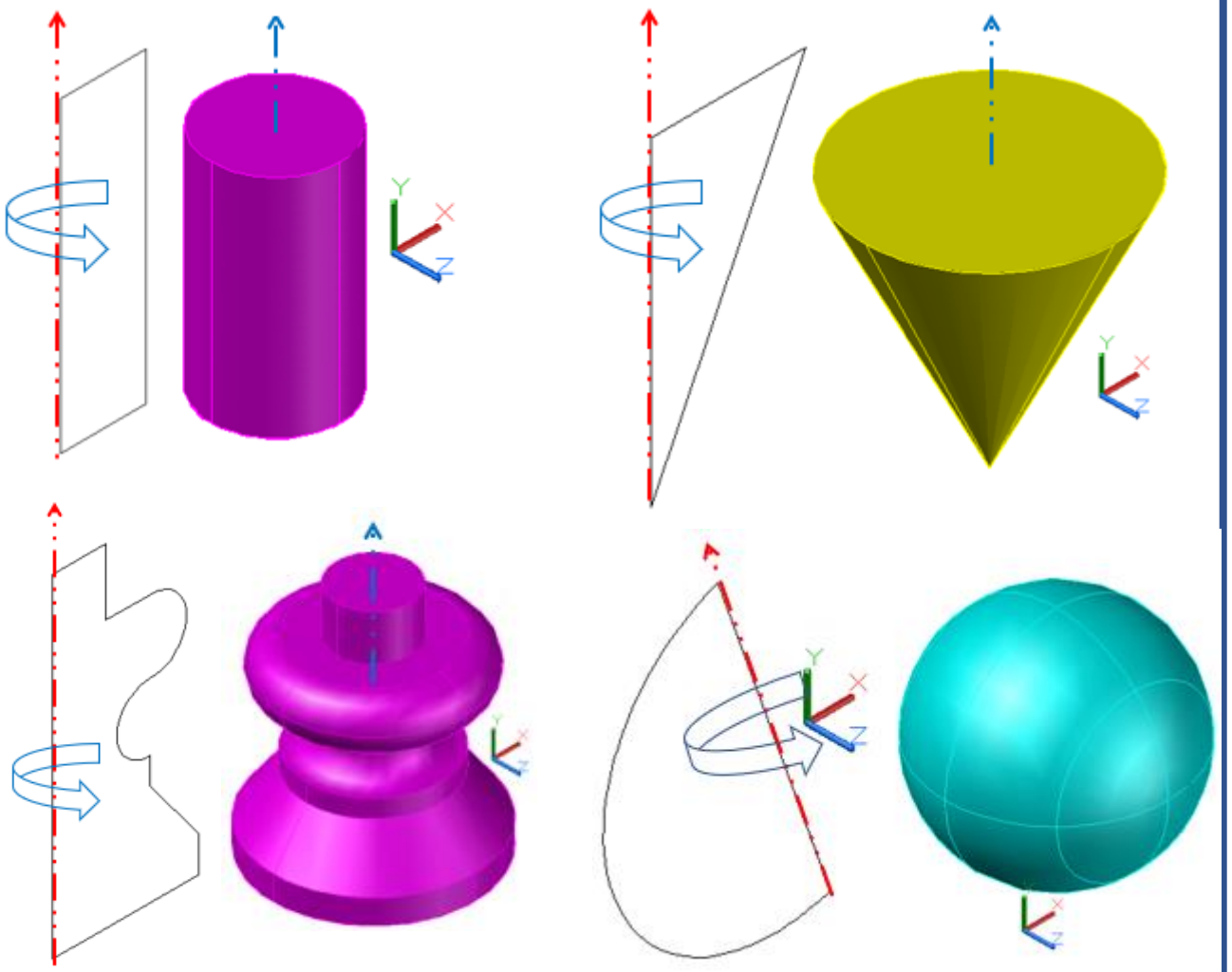
$(O,\vec{y},\vec{z})$

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Si on suppose que deux plans du repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ sont des plans de symétrie matérielle alors la matrice est diagonale.

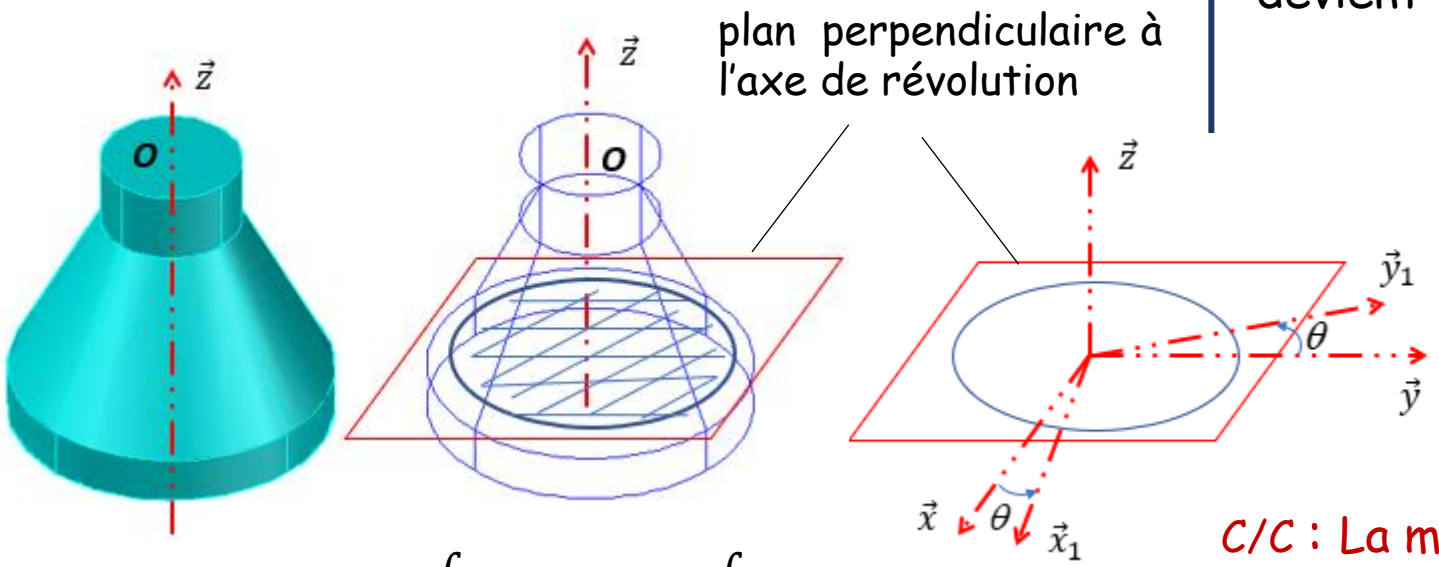
Symétrie de révolution :

Solide de révolution : Volume engendré par rotation d'une surface plane autour d'un axe dit de révolution.



Symétrie de révolution :

- L'intersection d'un solide de révolution avec un plan perpendiculaire à l'axe de révolution : DISQUE d'épaisseur négligeable.



On montre que : (voir page 11)

$$\int_{P\in S} x^2 . dm = \int_{P\in S} y^2 . dm \quad \left(+ \int_S z^2 . dm \right)$$

$$\int_S (x^2 + z^2) . dm = \int_S (y^2 + z^2) . dm$$

$$\Rightarrow \boxed{B = A}$$

On montre que : (voir page 10)

$$\forall\theta \qquad \left(I_O(S)\right)_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} = \left(I_O(S)\right)_{\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}}$$

La forme de la matrice d'inertie d'un solide de révolution d'axe $(O,\vec{z})$ devient :

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

- Tout plan contenant l'axe de révolution est un plan de symétrie.
- Si un solide admet un axe de symétrie de révolution pour sa distribution de masse, alors tout trièdre orthogonal incluant l'axe de révolution, est trièdre principal d'inertie

C/C : La matrice d'inertie d'un solide de révolution est :

- Diagonale.
- son moment d'inertie / à l'axe de révolution est différent des deux autres.
- tout trièdre orthogonal incluant l'axe de révolution, est trièdre principal d'inertie

Axe $(O,\vec{x})$

$$I_O(S)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&B\end{pmatrix}_{(\vec{x},-,-)}$$

Axe $(O,\vec{y})$

$$I_O(S)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&B&0\\0&0&A\end{pmatrix}_{(-,\vec{y},-)}$$

Axe $(O,\vec{z})$

$$I_O(S)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

Expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque :

$$J_\Delta(S)=\vec{u}.\vec{J}_O(S,\vec{u})$$

$$\boxed{I_{(O,\vec{u})}(S)=\vec{u}.(I_O(S).\vec{u})}$$

On montre que pour un solide de révolution d'axe $(O,\vec{z})$:

$$\forall\theta \qquad (I_O(S))_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}=(I_O(S))_{\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}}$$

On donne :

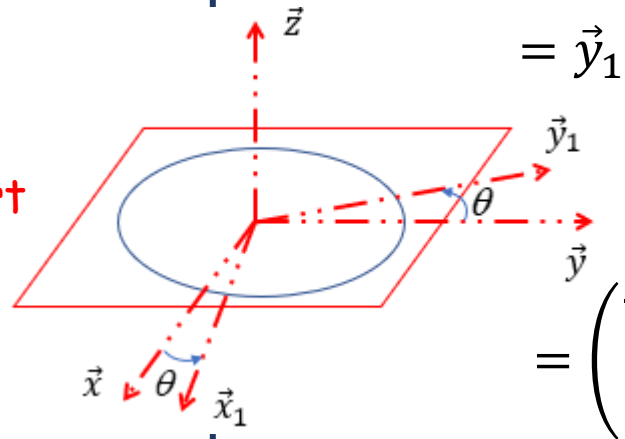
$$I_O(S)=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad I_{(O,\vec{y})}(S)=A$$

Puisque l'axe $(O,\vec{z})$ est un axe de révolution $\Rightarrow$ $I_O(S)=\begin{pmatrix}A'&0&0\\0&A'&0\\0&0&C\end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z})}$

$$A'=I_{(O,\vec{y}_1)}(S)=??$$

$$I_{(O,\vec{y}_1)}(S)=\vec{y}_1.(I_O(S).\vec{y}_1)$$

$$=\vec{y}_1.\left(\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.\begin{pmatrix}-Sin\theta\\Cos\theta\\0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\right)$$



$$=\begin{pmatrix}-Sin\theta\\Cos\theta\\0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}.\begin{pmatrix}-A.Sin\theta\\A.Cos\theta\\0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$=A.Sin^2\theta+A.Cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad I_{(O,\vec{y}_1)}(S)=A$$

$$I_{(O,\vec{x}_1)}(S)=\vec{x}_1.(I_O(S).\vec{x}_1)$$

En reprenant les mêmes étapes on peut déduire $\quad I_{(O,\vec{x}_1)}(S)=A$

On montre que : $\int_{P\in S} x^2 . dm = \int_{P\in S} y^2 . dm$

$$\int_{P\in S} (x^2 - y^2). dm = \sigma. \int_{P\in S} (x^2 - y^2). ds$$

Avec les coordonnées polaires

$$= \sigma. \int \left((r.\cos\theta)^2 - (r.\sin\theta)^2\right). r. dr. d\theta$$

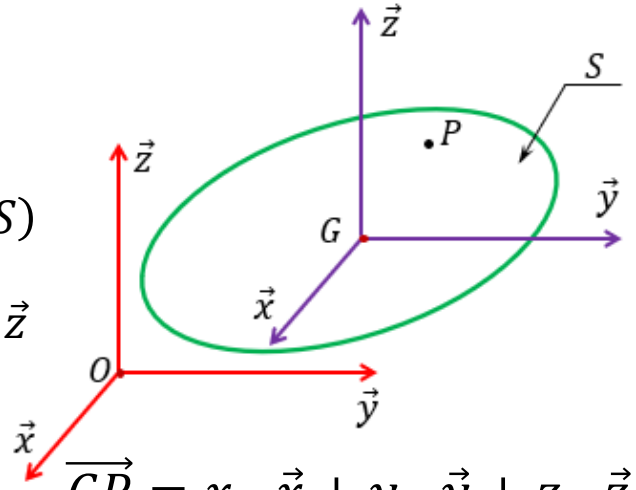
$$= \sigma. \int_0^{\rho} r^3. dr . \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) . d\theta = 0$$

Changement de point :
Théorème de Huygens :

$I_G(S) \Rightarrow I_O(S)$

$\overrightarrow{OG} = x_G.\vec{x} + y_G.\vec{y} + z_G.\vec{z}$

$\overrightarrow{OP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$



$\overrightarrow{GP} = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$

La matrice d'inertie au point G, centre d'inertie du solide (S) étant connue on cherche à déterminer la matrice d'inertie en un point O quelconque.

$$I_G(S) = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \quad A_G = \int_{P\in S} ({y_1}^2 + {z_1}^2) . dm$$

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \quad A_O = \int_{P\in S} (y^2 + z^2) . dm$$

$$A_O = \int_{P\in S} \left((y_1 + y_G)^2 + (z_1 + z_G)^2\right) . dm$$

$$= \int ({y_1}^2 + {z_1}^2). dm + 2. \int y_1. y_G . dm$$

$$+ 2. \int z_1. z_G . dm + \int ({y_G}^2 + {z_G}^2) . dm$$

$$= A_G + 2. y_G. \int y_1. dm + 2. z_G. \int z_1. dm$$

$$+ m. ({y_G}^2 + {z_G}^2)$$

$$I_O(S) = I_G(S) + m.\begin{pmatrix} (y_G^2 + z_G^2) & -(x_G.y_G) & -(x_G.z_G) \\ -(x_G.y_G) & (x_G^2 + z_G^2) & -(y_G.z_G) \\ -(x_G.z_G) & -(y_G.z_G) & (x_G^2 + y_G^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La position du centre d'inertie G est défini par :

$$\forall A. \quad m.\overrightarrow{AG} = \int \overrightarrow{AP}.dm$$

(Voir page 13)

Cas particulier :

$$\int \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$$

$$\int y_1.dm = \int \overrightarrow{GP}.\vec{y}.dm$$

$$= \left(\int \overrightarrow{GP}.dm\right).\vec{y}$$

$$A_O = A_G + m.({y_G}^2 + {z_G}^2)$$

En reprenant les mêmes étapes on peut déduire

$$A_O = A_G + m.(y_G^2 + z_G^2)$$

$$B_O = B_G + m.(x_G^2 + z_G^2)$$

$$C_O = C_G + m.(x_G^2 + y_G^2)$$

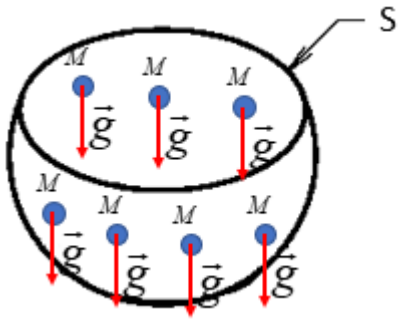
$$D_O = D_G + m.y_G.z_G$$

$$E_O = E_G + m.x_G.z_G$$

$$F_O = F_G + m.x_G.y_G$$

Rappel:

Modélisation locale :



$\vec{g}$: Représente l'accélération de la pesanteur.

$$\vec{f}_M(pes \to S) = \vec{g}$$

- $d\vec{R}_M(pes \to S) = \vec{f}_M(pes \to S).dm$
- $d\vec{M}_A(pes \to S) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_M(pes \to S).dm$

Torseur de l'action de la pesanteur :

$$\{T(pes \to S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(pes \to S) \\ \vec{M}_A(pes \to S) \end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{R}(pes \to S) = \int_{M \in S} \vec{g}.dm \qquad \vec{M}_A(pes \to S) = \int_{M \in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{g}.dm$$

$$\vec{R}\left(pes \rightarrow S\right) = \int_{M\in S} \vec{g}.dm = \vec{g}.\int_{M\in S} dm = m.\vec{g}$$

$$\vec{M}_A\left(pes \rightarrow S\right) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{g}.dm = \left(\int_{M\in S} \overrightarrow{AM}.dm\right) \wedge \vec{g}$$

$$\vec{R}\left(pes \rightarrow S\right).\vec{M}_A\left(pes \rightarrow S\right) = 0$$

Le torseur $\left\{T(pes \rightarrow S)\right\}$ est glisseur $\Rightarrow \exists$ un point, qu'on note G, tel que $\vec{M}_G\left(pes \rightarrow S\right) = \vec{0}$

$$\vec{M}_G\left(pes \rightarrow S\right) = \int_{M\in S} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{g}.dm = \left(\int_{M\in S} \overrightarrow{GM}.dm\right) \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \int_{M\in S} \overrightarrow{GM}.dm = \vec{0}$$

A est un point quelconque

$$\int_{M\in S} \overrightarrow{GA}.dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}.dm = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{AG}.\int_{M\in S} dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}.dm = \vec{0}$$

$$\boxed{m.\overrightarrow{AG} = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}.dm}$$

Dans le cas d'un ensemble de n solides la position du centre d'inertie G est défini par :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\right).\overrightarrow{AG_\Sigma} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i.\overrightarrow{AG_i}}$$

Principe de conservation de la masse :

On admet que la masse est une grandeur indépendante du temps :

$$\forall t \qquad m(\Sigma) = constante$$

On peut écrire, compte tenu de ce principe

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{P\in\Sigma} \vec{f}(P,t).dm\right] = \int_{P\in\Sigma} \frac{d}{dt}\left[\vec{f}(P,t)\right].dm$$

avec $\vec{f}(P,t)$ un champs de vecteur défini, en tout point du système matériel (Σ) et à chaque instant

Pour un point matériel M de masse m en mouvement par rapport à un repère R :

Quantité de mouvement : $m.\vec{V}(M/R)$

Moment cinétique en A :

$$\vec{L}_A(M/R) = \overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{V}(M/R)$$

Torseur cinétique :

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R.

Le torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant:

$$\{C(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_C(S/R) \\ \vec{\sigma}(A,S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Résultante cinétique :

(Quantité de mouvement)

$$\vec{R}_C(S/R) = \int_{M\in S} \vec{V}(M/R).dm$$

Moment cinétique d'un solide :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R).dm$$

La position du centre d'inertie G (O point fixe dans R)

$$m.\overrightarrow{OG} = \int_{M\in S} \overrightarrow{OM}.dm$$

Conséquence du principe de conservation de la masse

$$\left[\frac{d}{dt} m.\overrightarrow{OG}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{M\in S} \overrightarrow{OM}.dm\right]_R = \int_{M\in S} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right]_R .dm$$

$$\vec{R}_C(S/R) = \int_{M\in S} \vec{V}(M/R).dm$$

$$\boxed{\vec{R}_C(S/R) = m.\vec{V}(G/R)}$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R).dm$$

M point appartenant naturellement au solide (S) $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M \in S/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(A \in S/R).dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm$$

Opérateur d'inertie :

$$\vec{J}_A\left(S,\vec{\Omega}(S/R)\right) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}\right).dm$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \left(\int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\,.dm\right) \wedge \vec{V}(A\in S/R) + \vec{J}_A\left(S,\vec{\Omega}(S/R)\right)$$

$$\vec{J}_A\left(S,\vec{\Omega}(S/R)\right) = I(A,S).\vec{\Omega}(S/R)$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,S/R) = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A\in S/R) + I(A,S).\vec{\Omega}(S/R)}$$

V. Vitesse du point A lié à S

Torseur dynamique :

Le torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant:

$$\{D(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_d(S/R) \\ \vec{\delta}(A,S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Résultante dynamique :
(Quantité d'accélération)

$$\vec{R}_d(S/R) = \int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/R)\,.dm$$

Moment dynamique d'un solide :

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R)\,.dm$$

Résultante dynamique :

$$\left[\frac{d}{dt} m.\vec{V}(G/R)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{M\in S} \vec{V}(M/R)\,.dm\right]_R$$

$$= \int_{M\in S} \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(M/R)\right]_R .dm$$

$$\boxed{\vec{R}_d(S/R) = m.\vec{\Gamma}(G/R)}$$

Relation entre le Moment cinétique et le moment dynamique d'un solide :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R = \int_{M\in S} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/R)\right]_R . dm$$

$$= \int_{M\in S} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AM}\right]_R \wedge \vec{V}(M/R). dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(M/R)\right]_R . dm$$

$$= \int_{M\in S} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AM}\right]_R \wedge \vec{V}(M/R). dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(M/R)\right]_R . dm$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AM}\right]_R = -\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OA}\right]_R + \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}\right]_R = -\vec{V}(A/R) + \vec{V}(M/R)$$

$$= \int_{M\in S} \left(-\vec{V}(A/R)\right)\wedge\vec{V}(M/R). dm + \int_{M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M/R) . dm$$

$$= -\vec{V}(A/R)\wedge \int_{M\in S} \left(\vec{V}(M/R). dm\right) + \vec{\delta}(A,S/R)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R = -\vec{V}(A/R)\wedge m.\vec{V}(G/R) + \vec{\delta}(A,S/R)$$

$$\boxed{\vec{\delta}(A,S/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R + m.\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G/R)}$$

Pour un point matériel M de masse m en mouvement par rapport à un repère R :

Energie cinétique :

$$Ec(M/R) = \frac{1}{2}.m.\left(\vec{V}(M/R)\right)^2$$

Energie cinétique :

L'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est le scalaire suivant :

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\int_{M\in S}\left(\vec{V}(M/R)\right)^2.dm$$

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M\in S/R)$$
$$= \vec{V}(A\in S/R) + \vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AM}$$

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\left(\int_{M\in S}\vec{V}(M/R).\vec{V}(A\in S/R).dm + \int_{M\in S}\vec{V}(M/R).\left(\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AM}\right).dm\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\int_{M\in S}\vec{V}(M/R).dm\right).\vec{V}(A\in S/R) + \int_{M\in S}\vec{\Omega}(S/R).\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/R)\right).dm\right)$$

Produit mixte :
permutation circulaire

$$\vec{U}.\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right) = \vec{W}.\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right) = \vec{V}.\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{R}_C(S/R).\vec{V}(A\in S/R) + \vec{\Omega}(S/R).\int_{M\in S}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/R)\right).dm\right)$$

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\left(\vec{R}_C(S/R).\vec{V}(A\in S/R) + \vec{\Omega}(S/R).\vec{\sigma}(A,S/R)\right)$$

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\vec{R}_C(S/R)\\ \vec{\sigma}(A,S/R)\end{Bmatrix}_A.\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A\in S/R)\end{Bmatrix}_A$$

$$\boxed{T(S/R) = \frac{1}{2}\{C(S/R)\}.\{V(S/R)\}}$$

Torseur cinétique :

$$\{C(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_C(S/R) \\ \vec{\sigma}(A,S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Résultante cinétique :

$$\vec{R}_C(S/R) = m.\vec{V}(G/R)$$

Moment cinétique d'un solide : (1)

Caractéristiques d'inertie

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + I(A,S).\vec{\Omega}(S/R)$$

Elts Torseur cinématique

(2) $$\vec{\sigma}(B,S/R) = \vec{\sigma}(A,S/R) + \vec{R}_C(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

- L'expression du moment cinétique en fonction des moment et des produits d'inertie est applicable uniquement à un solide.
- Avant de multiplier deux matrices, vérifier qu'elles sont bien exprimées dans la même base.

$$I(A,S).\vec{\Omega}(S/R)$$

  - ✓ Il est conseillé d'exprimer le vecteur rotation dans la même base que la matrice d'inertie.

- La matrice d'inertie du solide (S) est constante si le point A est un point du solide (S).
- Pour obtenir le moment cinétique du solide (S), en un point B qui n'est pas lié au solide (S), il suffit d'appliquer la relation de changement de point du moment cinétique (2).
  - ✓ Dans le cas où on utilise la relation (1), il ne faut pas utiliser la dérivation vectorielle pour le calcul du vecteur vitesse $\vec{V}(B \in S/R)$.
- Le torseur cinétique pour un système matériel (Σ) constitué de n solides :

$$\{C(\Sigma/R)\} = \sum_{i=1}^{n} \{C(S_i/R)\}$$

Torseur dynamique :

$$\{D(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_d(S/R) \\ \vec{\delta}(A,S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Résultante dynamique :

$$\vec{R}_d(S/R) = m.\vec{\Gamma}(G/R)$$

Moment dynamique d'un solide :

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R + m.\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

$$\vec{\delta}(B,S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + \vec{R}_d(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

- Pour calculer par exemple $\vec{u}.\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R$, il est pratiquement toujours plus simple d'utiliser :

$$\vec{u}.\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R)\right]_R = \frac{d}{dt}\left(\vec{u}.\vec{\sigma}(A,S/R)\right) - \left[\frac{d}{dt}\vec{u}\right]_R.\vec{\sigma}(A,S/R)$$

- Le torseur dynamique pour un système matériel (Σ) constitué de n solides :

$$\{D(\Sigma/R)\} = \sum_{i=1}^{n}\{D(S_i/R)\}$$

- $\vec{\delta}(A,\Sigma/R) = \sum_{i=1}^{n}\vec{\delta}(A,S_i/R) =$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S_i/R)\right]_R + M_i.\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G_i/R)\right)$$

  - ✓ Vecteur vitesse du point géométrique A indépendant des solides (S_i).
  - ✓ Il est conseillé d'utiliser la dérivation vectorielle.

- Si on suppose la masse de l'ensemble matériel (Σ) concentrée en centre d'inertie G, l'ensemble matériel (Σ) est assimilée à une masse ponctuelle (géométrie négligeable).

  - ✓ La matrice d'inertie au point G est nulle $(I_G(\Sigma) = (0))$.
  - ✓ Le moment cinétique au point G est nul $\vec{\sigma}(G,\Sigma/R) = \vec{0}$.
  - ✓ Le moment dynamique au point G est nul $\vec{\delta}(G,\Sigma/R) = \vec{0}$.

- Le torseur dynamique au point G s'écrit

$$\{D(\Sigma/R)\} = \begin{Bmatrix}\vec{R}_d(\Sigma/R)\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_G$$

- Pour calculer le moment dynamique en un point quelconque A : $\vec{\delta}(A,S/R) = m.\vec{\Gamma}(G/R)\wedge\overrightarrow{GA}$.

Calcul des énergies cinétiques

$$T(\Sigma/R) = \sum_{i=1}^{n}T(S_i/R)$$

$$T(S_i/R) = \frac{1}{2}.\{V(S_i/R)\}.\{C(S_i/R)\}$$

<u>Proposition :</u> pour le choix du point de calcul, prendre celui de la matrice d'inertie ou celui du moment d'inertie.

(Si J est le moment d'inertie par rapport à l'axe $(A,\vec{x})$ alors par définition

$$J = I_{A,\vec{x}}(S) = \vec{x}.(I_A(S).\vec{x})$$

Ou si la matrice est connue en A, l'expression de l'énergie cinétique du solide S_i/R devient

$$T(S_i/R) = \frac{1}{2}.\left(m_i.\vec{V}(G_i/R).\vec{V}(A,S_i/R) + \vec{\Omega}(S_i/R).\vec{\sigma}(A,S_i/R)\right)$$