

*Révision de la*

*Cinématique*

*et*

*la Statique du solide*

*Proposé par Mr : **A. ELFARH***

## Exercice de rappel sur la cinématique et la statique des solides

### Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle

Une E.P.A.S. est une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité.

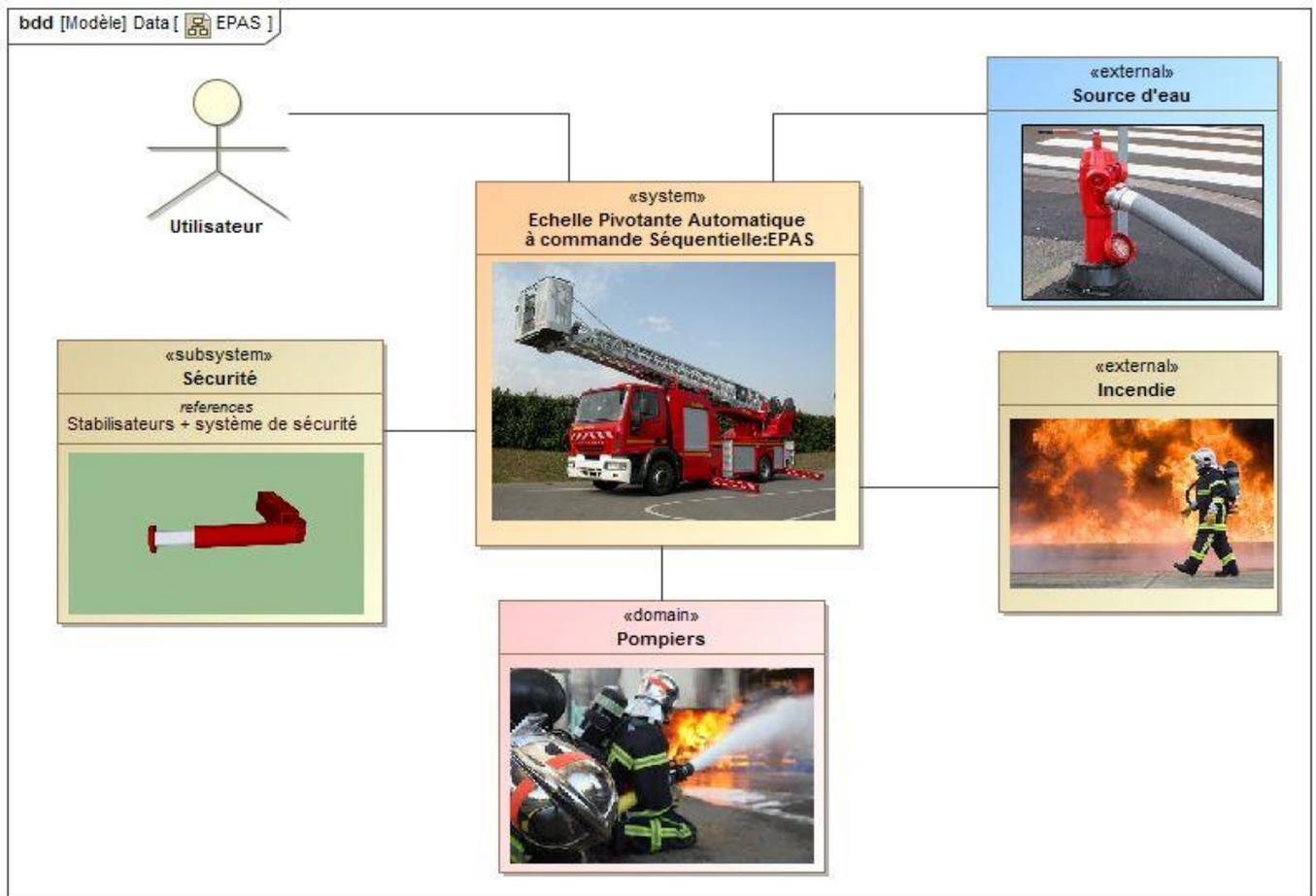


Figure 1 : Diagramme de contexte

Le déplacement de la plate-forme est réalisé suivant trois axes : voir figure 2

- Le déploiement du parc échelle (axe 1) : Chaque plan de l'échelle peut se translater par rapport aux autres ; seul le quatrième plan d'échelle est solidaire du berceau.
- Le pivotement autour de l'axe Y (axe 2) : La tourelle 1 peut pivoter par rapport au châssis autour d'un axe vertical.
- La rotation autour de l'axe Z (axe 3) : Le berceau peut tourner par rapport à la tourelle 2 autour d'un axe horizontal.

Un système de sécurité peut, à tout moment, stopper le déplacement de la plate-forme s'il y a un risque de basculement du camion porteur :

Des capteurs d'efforts placés sur le parc échelle permettent de tenir compte de la charge dans la plate-forme.

Des capteurs de position sur les trois axes permettent de définir la position de la plate-forme.

Des capteurs inductifs détectent la position de sortie des stabilisateurs.

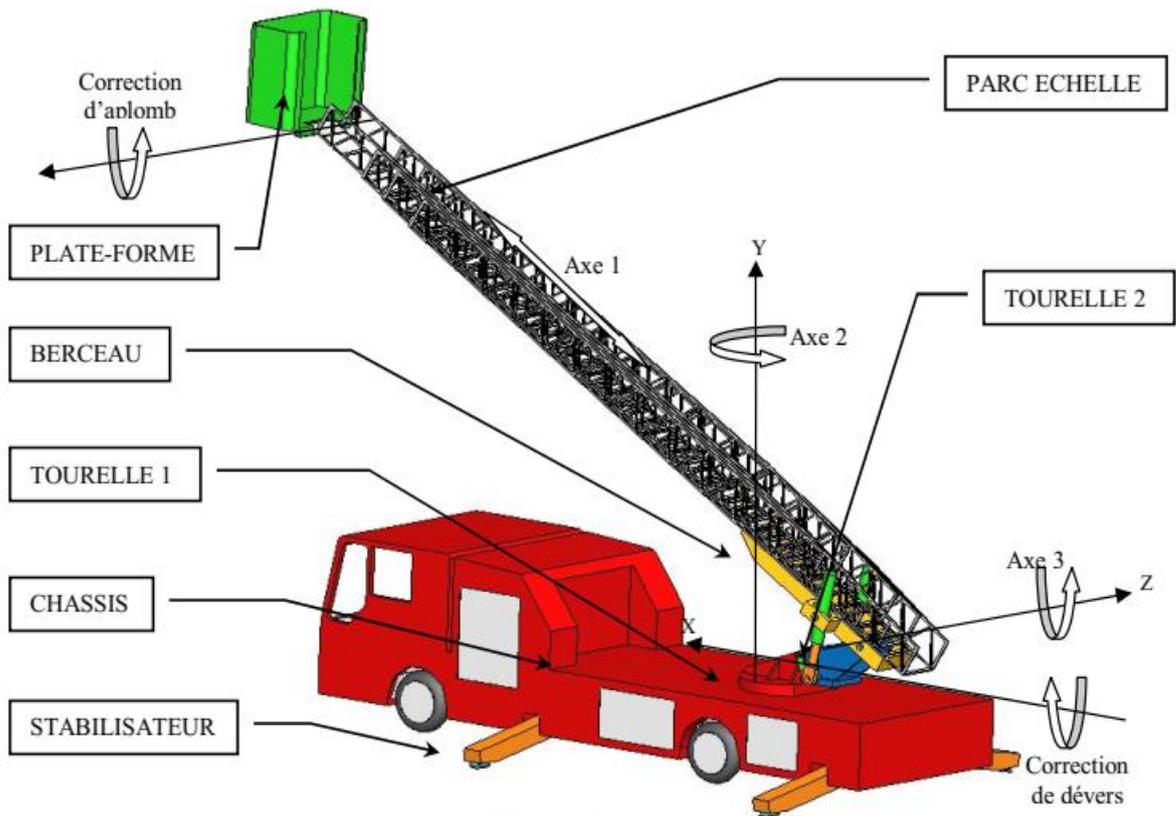


Figure 2

**ETUDE DE L'AXE 3**

Le système de dressage/abaissement réalise la rotation de la plate-forme autour d'un axe horizontal Z.

On propose le paramétrage sur le système de la figure 3 puis sur le schéma cinématique de la figure 4.

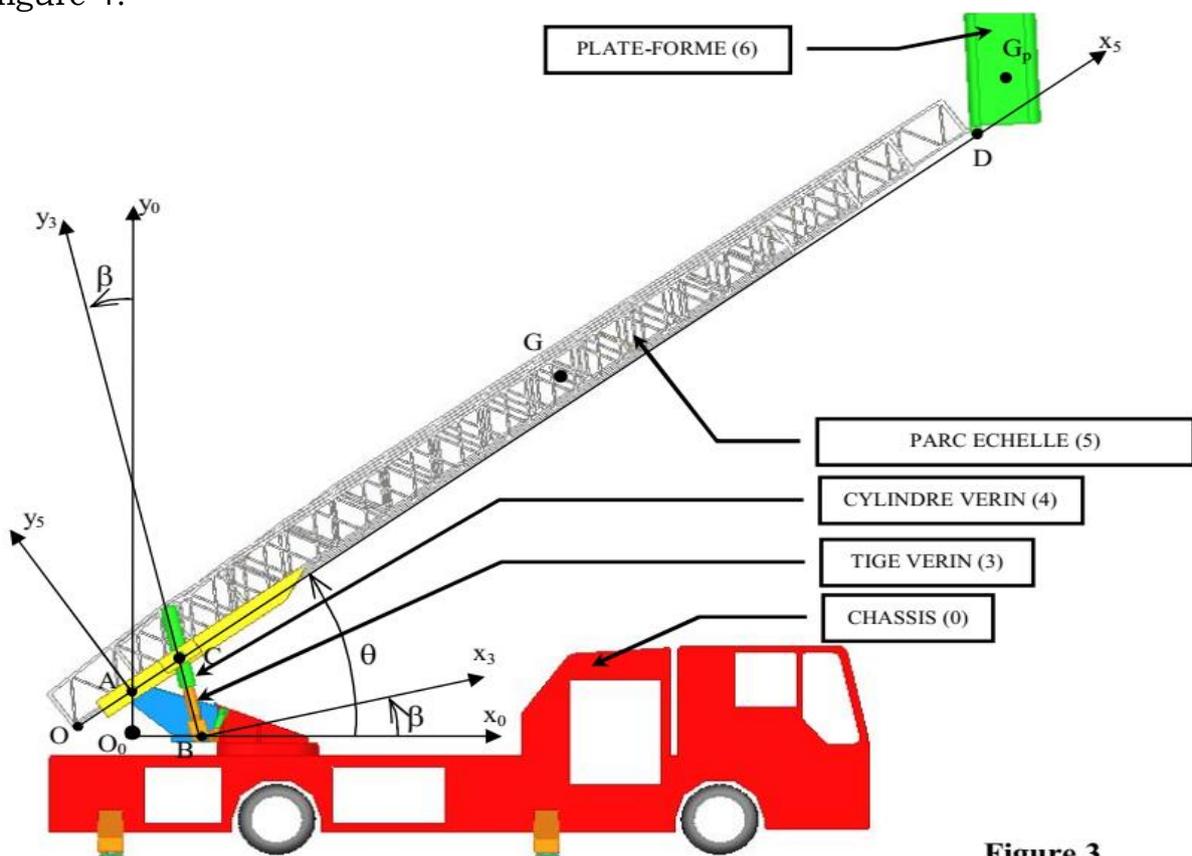


Figure 3

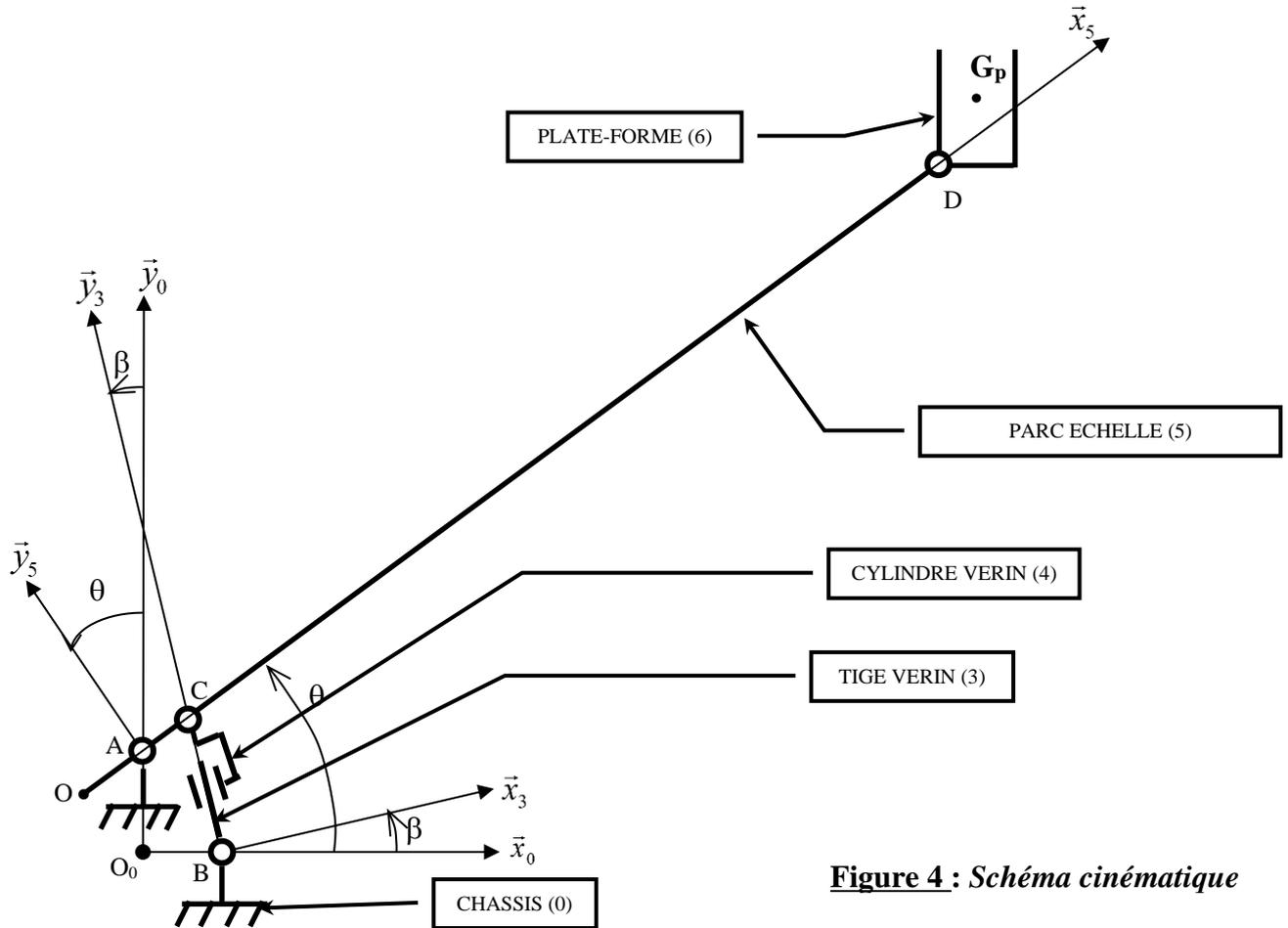


Figure 4 : Schéma cinématique

Paramétrage :

Le repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au châssis fixe (0), avec :  $\vec{O_0A} = a \cdot \vec{y}_0$  et  $\vec{O_0B} = b \cdot \vec{x}_0$ .

Le repère  $R_5 = (A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$  est lié à l'ensemble parc échelle (5), avec :  $(\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5) = \theta$  ;  
 $\vec{OA} = d\vec{x}_5$  ;  $\vec{AC} = c \cdot \vec{x}_5$  ;  $\vec{AD} = H \cdot \vec{x}_5$ .

Le repère  $R_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  est lié à la tige du vérin (3), avec :  $\vec{BC} = y(t) \cdot \vec{y}_3$  ;  $(\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = \beta$ .

Les liaisons aux points A, B et C sont des liaisons pivots d'axe  $\vec{z}_0$ .

Le cylindre creux du vérin (4) est en liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{y}_3)$  avec la tige (3).

La plate forme (6) de centre d'inertie  $G_p$  est en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$  avec le parc-échelle (5) :

$$\vec{DG}_p = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$$

On tiendra compte dans cette partie du fait que la plate-forme reste toujours horizontale.

**Partie I : Etude Cinématique**

**Notation préconisée :** On utilisera l'écriture suivante pour les torseurs cinématiques du mouvement du solide  $j$  par rapport au solide  $i$  :  $\{V(j/i)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(j/i) \\ \vec{V}(M \in j/i) \end{matrix} \right\}_M$

**Questions :**

**Q1.** Tracer les figures planes de calcul.

**Q2.** Ecrire au point A le torseur cinématique  $\{9(5/0)\}_A$ , puis déduire au point O le torseur cinématique :  $\{9(5/0)\}_O$ .

**Q3.** Calculer le vecteur vitesse :  $\vec{V}(D \in 5 / R_0)$ .

**Q4.** Quelle est la nature de mouvement de la plate forme (6) par rapport au châssis (0).

**Q5.** En déduire le vecteur vitesse :  $\vec{V}(G_p \in 6 / R_0)$ .

**Q6.** Calculer le vecteur vitesse :  $\vec{V}(C \in 3 / R_0)$ .

**Q7.** Calculer le vecteur vitesse :  $\vec{V}(C \in 4 / 3)$ .

**Q8.** En déduire le vecteur vitesse :  $\vec{V}(C \in 4 / R_0)$ .

**Q9.** En faisant une fermeture géométrique, déterminez la position  $y(t)$  en fonction de l'angle  $\theta(t)$  et des paramètres géométriques.

**Q10.** En faisant une fermeture de chaîne cinématique, déterminez la vitesse de sortie du vérin  $\dot{y}(t)$  en fonction de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$  et des paramètres géométriques.

**Partie II : Etude statique**

L'objet de cette étude est de :

- Déterminer l'effort du vérin qui permet de maintenir l'équilibre de l'échelle et la charge.
- Déterminer le couple du moteur permettant de maintenir la plate forme horizontale.

Le problème sera considéré plan.

Toutes les **liaisons** seront considérées **parfaites** et sont listées comme suit :

L(0/3) : liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  ; L(5/6) : liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$

L(0/5) : liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  ; L(3/4) : liaison pivot glissant de direction  $\vec{y}_3$

L(5/4) : liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_0)$ .

Le problème étant plan, donc l'action mécanique dans une liaison entre deux solides (i) et (j) sera modélisée par le glisseur :

$$\{\tau(i \rightarrow j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(i \rightarrow j) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M_{ij}} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{array} \right\}_{(M_{ij}, \vec{x}_i, \vec{y}_j, \vec{z}_0)} \quad \text{avec } \vec{R}(i \rightarrow j) \text{ située dans le plan } (\vec{x}_i, \vec{y}_i).$$

On propose le paramétrage suivant :

- Le repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au châssis fixe (0), avec :  $\vec{O_0A} = a \cdot \vec{y}_0$  et  $\vec{O_0B} = b \cdot \vec{x}_0$ .
- Le repère  $R_5 = (A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$  est lié à l'ensemble parc échelle(5), avec :  $(\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5) = \theta$  ;  $\vec{OA} = d\vec{x}_5$  ;  $\vec{AC} = c \cdot \vec{x}_5$  ;  $\vec{AD} = H \cdot \vec{x}_5$ .

Le parc-échelle (5) est de masse **m** et de centre de gravité G tel que :  $\vec{OG} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x}_5 + \frac{h}{3} \cdot \vec{y}_5$ .

- Le repère  $R_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  est lié à la tige du vérin hydraulique (3+4), avec:  $\overline{BC} = y(t) \cdot \vec{y}_3$ ;  $(\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = \beta$ . La masse du vérin est négligée devant les autres masses. L'huile sous pression du vérin hydraulique (3+4) devra exercer un effort, modélisé par un glisseur de résultante  $\vec{F}_v = F_v \vec{y}_3$ , permettant de garder l'ensemble (5) en équilibre :

$$\{\tau(\text{Huile} \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} F_v \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

- La plate forme chargée (6):  
Pendant le dressage ou l'abaissement, la plate-forme reste toujours horizontale. Sa masse une fois chargée sera notée  $M$  et son centre de gravité est le point  $G_p$  tel que :  $\overline{DG_p} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$ .  
La plate forme (6) est maintenue horizontale grâce à un moteur exerçant un couple

$$\text{moteur} : \{\tau(\text{Moteur} \rightarrow 6)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_D$$

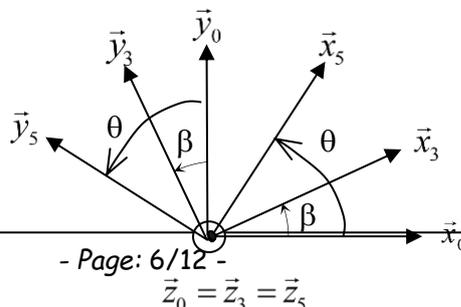
- L'accélération de la pesanteur :  $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$

**Questions :**

- Q11.** Etablir le graphe d'analyse des actions mécaniques.
- Q12.** Ecrire l'expression du torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le parc échelle (5) au point G :  $\{\tau(\text{Pesanteur} \rightarrow 5)\}_G$
- Q13.** Ecrire la forme des torseurs d'actions mécaniques transmissibles dans les liaisons au point C dans l'espace et dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  :  $\{\tau(4 \rightarrow 5)\}_C$  ;  $\{\tau(3 \rightarrow 4)\}_C$
- Q14.** Montrer que la résultante de l'action mécanique du cylindre (4) du vérin sur l'échelle (5) peut se mettre sous la forme :  $\overline{R}(4 \rightarrow 5) = R_{45} \vec{y}_3$ .
- Q15.** En appliquant le théorème de la résultante statique au cylindre (4) en projection sur  $\vec{y}_3$ , exprimer  $R_{45}$  en fonction de  $F_v$ .
- Q16.** En isolant l'ensemble (E) = {5,6}, et en appliquant le théorème de votre choix, déterminer l'effort  $F_v$  du vérin.
- Q17.** Déterminer le couple moteur  $C_m$ . Expliquez la démarche (l'isolement et le théorème appliqué).

**Partie I : Corrigé**

**Q1.** Tracer les figures planes de calcul.



**Q2.** Ecrire au point A le torseur cinématique  $\{g(5/0)\}_A$ , puis déduire au point O le torseur cinématique :  $\{g(5/0)\}_O$ .

$$\{g(5/0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(5/0) \\ \vec{V}(A \in 5/0) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A ; \{g(5/0)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(5/0) \\ \vec{V}(O \in 5/0) \end{Bmatrix}_O$$

$$\text{On a : } \vec{V}(O \in 5/0) = \left[ \frac{d\overline{O_0O}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(\overline{O_0A} + \overline{AO})}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(a \cdot \vec{y}_0 - d\vec{x}_5)}{dt} \right]_R = -d \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5$$

$$\Rightarrow \{g(5/0)\}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ -d \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 \end{Bmatrix}_O$$

**Q3.** Calculer le vecteur vitesse :  $\vec{V}(D \in 5/R_0)$ .

$$\vec{V}(D \in 5/R_0) = \left[ \frac{d(\overline{O_0A} + \overline{AD})}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(a \cdot \vec{y}_0 + H\vec{x}_5)}{dt} \right]_R = H \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5$$

**Q4.** Quelle est la nature de mouvement de la plate forme (6) par rapport au châssis (0).

Mouvement de la plate forme (6) par rapport au châssis (0) : Translation circulaire.

**Q5.** En déduire le vecteur vitesse :  $\vec{V}(G_p \in 6/R_0)$ .

$$\vec{V}(G_p \in 6/R_0) = \vec{V}(D \in 6/R_0) = \underbrace{\vec{V}(D \in 6/5)}_{\vec{0} : \text{pivot}} + \vec{V}(D \in 5/R_0)$$

$$\Rightarrow \vec{V}(G_p \in 6/R_0) = \vec{V}(D \in 5/R_0) = H \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5$$

**Q6.** Calculer le vecteur vitesse :  $\vec{V}(C \in 3/R_0)$ .

$$\vec{V}(C \in 3/R_0) = \underbrace{\vec{V}(B \in 3/R_0)}_{\vec{0} : \text{pivot}} + \overline{CB} \wedge \vec{\Omega}(3/R_0) = -y(t) \cdot \vec{y}_3 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{z}_0 = -y(t) \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_3$$

**Q7.** Calculer le vecteur vitesse :  $\vec{V}(C \in 4/3)$ .

$$\vec{V}(C \in 4/3) = \left[ \frac{d(\overline{BC})}{dt} \right]_{R_3} = \left[ \frac{d(y(t) \cdot \vec{y}_3)}{dt} \right]_{R_3} = \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_3$$

**Q8.** En déduire le vecteur vitesse :  $\vec{V}(C \in 4/R_0)$ .

$$\vec{V}(C \in 4/R_0) = \vec{V}(C \in 4/3) + \vec{V}(C \in 3/R_0) = \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_3 + -y(t) \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_3$$

**Q9.** En faisant une fermeture géométrique, déterminez la position  $y(t)$  en fonction de l'angle  $\theta(t)$  et des paramètres géométriques.

**Fermeture géométrique :**

$\vec{O_0B} + \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AO_0} = \vec{0}$ , ce qui s'exprime en fonction du paramétrage :  
 $b \vec{x}_0 + y(t) \vec{y}_3 - c \vec{x}_5 - a \vec{y}_0 = \vec{0}$ .

En projection respectivement sur  $\vec{x}_0$  et sur  $\vec{y}_0$  :

$$\begin{cases} \text{Proj} / \vec{x}_0 : b - y(t) \sin \beta - c \cos \theta = 0 & (1) \\ \text{Proj} / \vec{y}_0 : y(t) \cos \beta - c \sin \theta - a = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(t) \sin \beta = b - c \cos \theta & (1) \\ y(t) \cos \beta = c \sin \theta + a & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2}}$$

**Q10.** En faisant une fermeture de chaîne cinématique, déterminez la vitesse de sortie du vérin  $\dot{y}(t)$  en fonction de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t)$  et des paramètres géométriques.

$\underbrace{\vec{V}(C \in 4/5)}_{\vec{0} : \text{pivot}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(C \in 4/3) + \vec{V}(C \in 3/R_0) - \vec{V}(C \in 5/R_0) = \vec{0}$

On a :  $\vec{V}(C \in 5/R_0) = \left[ \frac{d(\vec{O_0A} + \vec{AC})}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(a \cdot \vec{y}_0 + c \cdot \vec{x}_5)}{dt} \right]_R = c \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5$

Donc :  $\dot{y}(t) \cdot \vec{y}_3 - y(t) \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_3 - c \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 = \vec{0}$

Proj/  $\vec{y}_3 \Rightarrow : \dot{y}(t) = c \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 \cdot \vec{y}_3 = c \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta - \beta) \quad (3)$   
 $\Rightarrow \dot{y}(t) = c \cdot \dot{\theta} \cdot (\cos \theta \cdot \cos \beta + \sin \theta \cdot \sin \beta)$

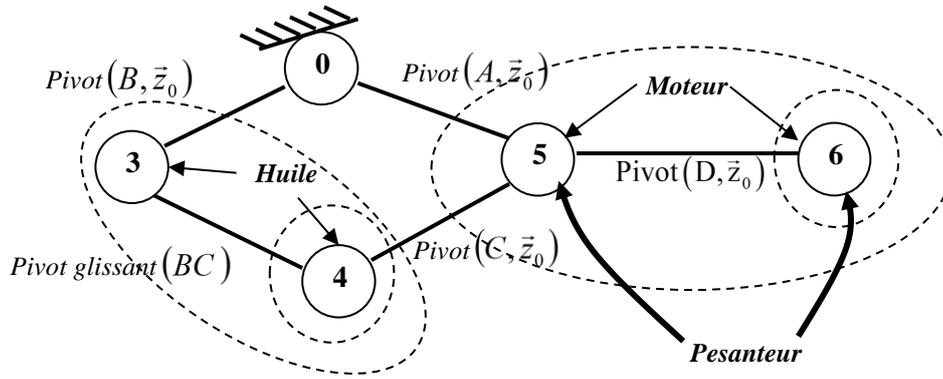
D'après la question 9 :  $\begin{cases} y(t) \sin \beta = b - c \cos \theta & (1) \\ y(t) \cos \beta = c \sin \theta + a & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{[b - c \cos \theta]}{y(t)} \\ \cos \beta = \frac{[c \sin \theta + a]}{y(t)} \end{cases}$

Ce qui donne :  $\dot{y}(t) = \frac{c}{y(t)} \dot{\theta} \cdot ([c \sin \theta + a] \cos \theta + [b - c \cos \theta] \sin \theta)$

$$\Rightarrow : \boxed{\dot{y}(t) = \frac{c}{y(t)} \dot{\theta} \cdot (a \cos \theta + b \sin \theta)}$$

**Partie II : corrigé**

**Q11.** Etablir le graphe d'analyse des actions mécaniques.



**Q12.** Ecrire l'expression du torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le parc échelle (5) au point G :  $\{\tau(\text{Pesanteur} \rightarrow 5)\}_G$

$$\{\tau(\text{Pesanteur} \rightarrow 5)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

**Q13.** Ecrire la forme des torseurs des actions mécaniques transmissibles dans les liaisons au point C dans l'espace et dans le plan  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i)$  :  $\{\tau(4 \rightarrow 5)\}_C$  ;  $\{\tau(3 \rightarrow 4)\}_C$

Liaisons	Torseurs des actions mécaniques transmissibles dans l'espace	Torseurs des actions mécaniques transmissibles dans le plan $(\vec{x}_i, \vec{y}_i)$
$L_{4-5}$	$\{\tau(4 \rightarrow 5)\} = \begin{Bmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & 0 \end{Bmatrix}_{(C, \vec{x}_i, \vec{y}_j, \vec{z}_0)}$	$\{\tau(4 \rightarrow 5)\} = \begin{Bmatrix} X_{45} & - \\ Y_{45} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(C, \vec{x}_i, \vec{y}_j, \vec{z}_0)}$
$L_{4-5}$	$\{\tau(3 \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} \\ 0 & 0 \\ Z_{34} & N_{34} \end{Bmatrix}_{(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$	$\{\tau(3 \rightarrow 4)\} = \begin{Bmatrix} X_{34} & - \\ 0 & - \\ - & N_{34} \end{Bmatrix}_{(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$

**Q14.** Montrer que la résultante de l'action mécanique du cylindre (4) du vérin sur l'échelle (5) peut se mettre sous la forme :  $\vec{R}(4 \rightarrow 5) = R_{45} \vec{y}_3$ .

On applique le théorème du moment statique au point B sur le vérin (3+4) :

$$\vec{M}_B(5 \rightarrow 4) + \underbrace{\vec{M}_C(0 \rightarrow 3)}_{=\vec{0} : \text{pivot dans le plan}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\vec{M}_C(5 \rightarrow 4)}_{=\vec{0} : \text{pivot dans le plan}} + \vec{BC} \wedge \vec{R}(5 \rightarrow 4) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$  la résultante  $\vec{R}(5 \rightarrow 4)$  est portée par la droite  $(BC) = (C, \vec{y}_3)$ .

Donc  $\vec{R}(5 \rightarrow 4) = R_{54} \vec{y}_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R}(4 \rightarrow 5) = R_{45} \vec{y}_3}$

**Q15.** En appliquant le théorème de la résultante statique au cylindre (4) en projection sur  $\vec{y}_3$ , exprimer  $R_{45}$  en fonction de  $F_v$ .

Théorème de la résultante statique au cylindre **(4)** en projection sur  $\vec{y}_3$  :

$$\vec{R}(5 \rightarrow 4) \cdot \vec{y}_3 + \underbrace{\vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{y}_3}_{= 0 : \text{pivot glissant d'axe } \vec{y}_3} + \vec{R}(\text{Huile} \rightarrow 4) \cdot \vec{y}_3 = 0$$

$$\begin{aligned} R_{54} + F_v = 0 &\Rightarrow R_{54} = -F_v \\ &\Rightarrow \boxed{R_{45} = F_v} \end{aligned}$$

**Q16.** En isolant l'ensemble **(E)** = {5,6}, et en appliquant le théorème de votre choix, déterminer l'effort **F<sub>v</sub>** du vérin.

Théorème du moment statique appliqué au point A sur l'ensemble **(E)** = {5,6} :

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 5) + \underbrace{\vec{M}_A(0 \rightarrow 5)}_{= \vec{0} : \text{pivot}} + \vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 5) + \vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 6) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 5) = \vec{M}_C(4 \rightarrow 5) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}(4 \rightarrow 5) = c \cdot \vec{x}_5 \wedge R_{45} \cdot \vec{y}_3 = c \cdot R_{45} \cos(\theta - \beta) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 5) = \underbrace{\vec{M}_G(\vec{g} \rightarrow 5)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AG} \wedge -mg \vec{y}_0 = \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right) \vec{x}_5 + \frac{h}{3} \vec{y}_5 \right] \wedge -mg \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A(\text{Pesanteur} \rightarrow 5) = -mg \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right) \cos \theta - \frac{h}{3} \sin \theta \right] \vec{z}_0$$

$$\vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 6) = \underbrace{\vec{M}_{G_p}(\vec{g} \rightarrow 6)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AG_p} \wedge -Mg \vec{y}_0 = \left[ H \cdot \vec{x}_5 + x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0 \right] \wedge -Mg \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 6) = -Mg [H \cdot \cos \theta + x_G] \vec{z}_0$$

On peut écrire :

$$c \cdot R_{45} \cos(\theta - \beta) \cdot \vec{z}_0 - mg \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right) \cos \theta - \frac{h}{3} \sin \theta \right] \vec{z}_0 - Mg [H \cdot \cos \theta + x_G] \vec{z}_0 = \vec{0}$$

On a :  $R_{45} = F_v$  , la relation (3) :  $c \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta - \beta) = \dot{y}(t)$  ,  $\dot{y}(t) = \frac{c}{y(t)} \dot{\theta} \cdot (a \cos \theta + b \sin \theta)$  et

$$y(t) = \sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2} \Rightarrow \frac{1}{c \cdot \cos(\theta - \beta)} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{y}(t)} = \frac{\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2}}{c(a \cos \theta + b \sin \theta)}$$

Donc :

$$F_v = \frac{\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2}}{c(a \cos \theta + b \sin \theta)} \left( mg \left[ \left( \frac{L}{2} - d \right) \cos \theta - \frac{h}{3} \sin \theta \right] + Mg [H \cdot \cos \theta + x_G] \right)$$

**Q17.** Déterminer le couple moteur  $C_m$ . Expliquez la démarche (l'isolement et le théorème appliqué).

Théorème du moment statique appliqué au point D sur **(6)** :

$$\underbrace{\vec{M}_D (\text{Moteur} \rightarrow 6)}_{= C_m \vec{z}_0} + \underbrace{\vec{M}_D (5 \rightarrow 6)}_{= \vec{0} : \text{pivot}} + \underbrace{\vec{M}_D (\text{pesanteur} \rightarrow 6)}_{= \overrightarrow{DG_p} \wedge -Mg\vec{y}_0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow C_m \cdot \vec{z}_0 + (x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0) \wedge -Mg\vec{y}_0 = \vec{0} \Rightarrow C_m \cdot \vec{z}_0 - Mgx_G \cdot \vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow \mathbf{C_m = Mgx_G}$$

# **Cinétique du solide**

*Proposé par Mr : A. OUIKASSI*

# CINETIQUE

Classe : .....

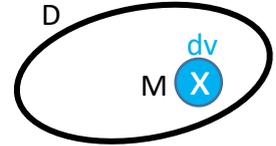
Prof. : Ouikassi

## 1. Masse d'un système matériel

### 1.1. Définition

La masse  $m_D$  d'un système matériel D est définie par la relation :  $m_D = \int_{M \in D} \rho(M) \cdot dv$

- ✓ M : point courant du système matériel D ;
- ✓  $\rho(M)$  désigne la masse volumique au voisinage du point M ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) ;
- ✓  $dv$  : le volume élémentaire autour du point M ( $\text{m}^3$ ) ;
- ✓  $m_D$  en Kg.



### 1.2. Remarque

Si on assimile D à une surface ou une ligne, on raisonne de la même manière en utilisant la masse surfacique ou linéique.

### 1.3. Rappels utiles

#### ■ Expression de l'élément de masse $dm$ :

- ✓ Solide volumique :  $dm = \rho \cdot dv$        $\rho$  : masse volumique ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )
- ✓ Solide surfacique :  $dm = \sigma \cdot ds$        $\sigma$  : masse surfacique ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-2}$ )
- ✓ Solide filaire (linéique) :  $dm = \lambda \cdot dl$        $\lambda$  : masse linéique ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-1}$ )

#### ■ Expression de l'élément de volume $dv$ :

- ✓ Coordonnées cartésiennes (x, y, z) :  $dv = dx \cdot dy \cdot dz$
- ✓ Coordonnées cylindriques (r,  $\theta$ , z) :  $dv = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$
- ✓ Coordonnées sphériques (r,  $\theta$ ,  $\varphi$ ) :  $dv = r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$

### 1.4. Principe de la conservation de masse

#### 1-4.a. Enoncé

Un système matériel D est à masse conservative si toute partie d de D est à masse constante au cours du temps.

#### 1-4.b. Conséquences

- Soit f une fonction scalaire définie relativement à la mesure de masse dm. On a le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_D f(M) \cdot dm \right] = \int_D \frac{d}{dt} [f(M)] \cdot dm$$

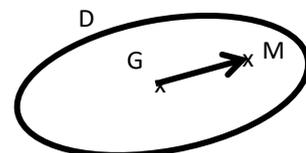
- Cette relation reste vraie dans le cas d'une fonction vectorielle.

## 2. Centre de gravité (Centre d'inertie)

### 2-1. Définition

Le centre de gravité du système matériel D est le point G tel que :

$$\int_{M \in D} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \vec{0}$$



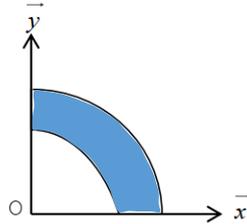
## 2-2. Remarque

Soit A point quelconque :

$$\int_{M \in D} \overrightarrow{AM} \cdot dm = m_D \cdot \overrightarrow{AG}$$

## 2-3. Application :

Déterminer le centre de gravité d'une portion de disque creux d'angle  $\pi/2$ , homogène de rayon intérieur  $r$  et extérieur  $R$  et de masse  $m$ .



Résultat :  $\overrightarrow{OG} = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} (\vec{x} + \vec{y})$

## 2-4. Propriétés

- Si le système matériel  $D$  possède un élément de symétrie matérielle alors  $G$  appartient à cet élément.

- Si  $D = \bigcup_1^n S_i$

avec :  $S_i$  solide de masse  $m_i$  et de centre de gravité  $G_i$  ;

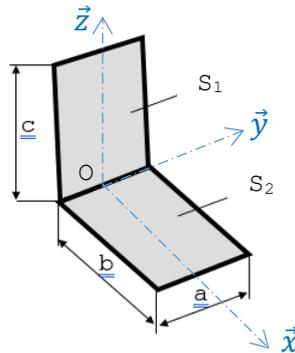
$G$  : centre de gravité de  $D$  ;

$A$  : point quelconque ;

Alors :  $\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_1^n m_i \overrightarrow{AG_i}}{\sum_1^n m_i}$  Relation du barycentre

## 2-5. Application :

Le solide ( $S$ ) est formé de deux plaques planes homogènes ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) de même matériau et d'épaisseur négligeable. Déterminer la position de son centre de gravité.



Résultat :  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2(b+c)} (b^2 \vec{x} + c^2 \vec{z})$

## 2-6. Vitesse et accélération du centre de gravité

Soit  $D$  système matériel de centre de gravité  $G$ , et  $O$  origine d'un repère  $R$ . On a :

$$m_D \cdot \vec{V}_{(G/R)} = \int_{M \in D} \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm \quad \text{et} \quad m_D \cdot \vec{\Gamma}_{(G/R)} = \int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M/R)} \cdot dm$$

- Démonstration :

$$m_D \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{M \in D} \overrightarrow{OM} \cdot dm \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [m_D \cdot \overrightarrow{OG}]_R = \frac{d}{dt} \left[ \int_{M \in D} \overrightarrow{OM} \cdot dm \right]_R \Leftrightarrow m_D \cdot \frac{d}{dt} [\overrightarrow{OG}]_R = \int_{M \in D} \frac{d}{dt} [\overrightarrow{OM}]_R \cdot dm$$

$$\text{d'où : } m_D \cdot \vec{V}_{(G/R)} = \int_{M \in D} \vec{V}_{(M, D/R)} \cdot dm$$

$$\text{Et on a aussi : } m_D \cdot \vec{\Gamma}_{(G/R)} = \int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M, D/R)} \cdot dm$$

- Remarque :

$$\text{Si } D = \bigcup_1^n S_i, \text{ alors : } \vec{V}_{(G/R)} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{V}_{(G_i/R)}}{\sum_1^n m_i} \text{ et } \vec{\Gamma}_{(G/R)} = \frac{\sum_1^n m_i \vec{\Gamma}_{(G_i/R)}}{\sum_1^n m_i}$$

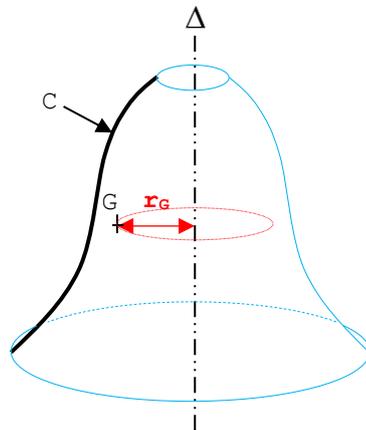
## 2-7. Théorèmes de GULDIN

### Premier théorème

- Enoncé

L'aire de la surface engendrée par la rotation d'une courbe plane et homogène, autour d'un axe de son plan ne la traversant pas, est le produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

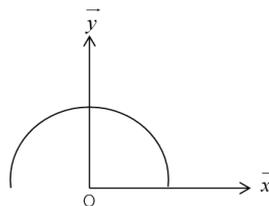
- Illustration



$$S = 2\pi r_G \ell \quad \text{Avec : } S \text{ est l'aire de la surface, et } \ell \text{ longueur de } C$$

- Application :

Déterminer le centre de gravité d'un fil demi-circulaire homogène, de rayon R, et de masse m.



$$\text{Résultat : } \vec{OG} = \frac{2R}{\pi} \vec{y}$$

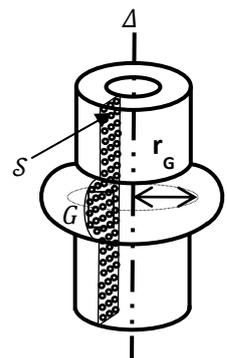
### Deuxième théorème

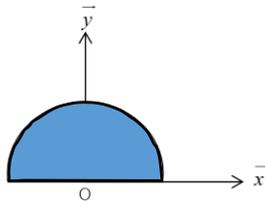
- Enoncé

Le volume engendré par la rotation d'une surface plane et homogène, autour d'un axe de son plan ne la traversant pas, est le produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité :  $V = 2\pi r_G S$

- Application :

Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène, de rayon R et de masse m.





Résultat :  $\vec{OG} = \frac{4R}{3\pi} \vec{y}$

**3. Opérateur d'inertie d'un solide S en un point Q**

**3-1. Définition**

L'opérateur d'inertie du solide S au point Q quelconque, appliqué au vecteur  $\vec{u}$  a pour expression :

$$\vec{J}_{(Q, S, \vec{u})} = \int_{M \in S} \vec{QM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QM}) \cdot dm$$

- Remarque :

Cet opérateur est linéaire et symétrique ; il est alors représentable par une matrice 3x3 symétrique, notée  $\vec{I}_{(Q, S)}$  telle que :

$$\vec{J}_{(Q, S, \vec{u})} = \vec{I}_{(Q, S)} \cdot \vec{u}$$

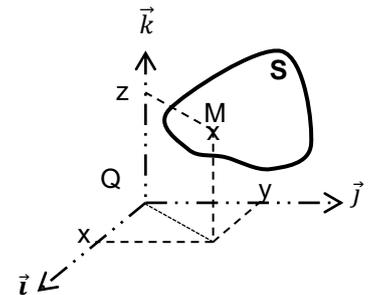
Cette matrice est appelée : **Matrice d'inertie du solide S au point Q.**

**3-2. Expressions des éléments de la matrice d'inertie**

Dans la base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on pose :  $\vec{QM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

On a alors :

$$\vec{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm & - \int_S xy \cdot dm & - \int_S xz \cdot dm \\ - \int_S xy \cdot dm & \int_S (x^2 + z^2) \cdot dm & - \int_S yz \cdot dm \\ - \int_S xz \cdot dm & - \int_S yz \cdot dm & \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$



- Démonstration :

Dans une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , la matrice d'inertie du solide S au point Q a pour expression :

$$\vec{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

$\swarrow$                        $\downarrow$                        $\searrow$   
 $\vec{J}_{(Q, S, \vec{i})}$              $\vec{J}_{(Q, S, \vec{j})}$              $\vec{J}_{(Q, S, \vec{k})}$

$$\vec{J}_{(Q, S, \vec{i})} = \int_{M \in S} \vec{QM} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{QM}) \cdot dm = \int_{M \in S} [ \vec{QM}^2 \cdot \vec{i} - (\vec{QM} \wedge \vec{i}) \cdot \vec{QM} ] \cdot dm$$

On pose :  $\vec{QM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Donc :  $\vec{J}_{(Q, S, \vec{i})} = \int_{M \in S} [ (x^2 + y^2 + z^2) \vec{i} - x \cdot \vec{QM} ] \cdot dm = \int_{M \in S} [ (x^2 + y^2 + z^2) \vec{i} - x \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) ] \cdot dm$

$$\vec{J}_{(Q, S, \vec{i})} = \left[ \int_{M \in S} (y^2 + z^2) dm \right] \vec{i} - \left[ \int_{M \in S} xy \cdot dm \right] \vec{j} - \left[ \int_{M \in S} xz \cdot dm \right] \vec{k}$$

On déduit alors que :

$$\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} \int_{M \in S} (y^2 + z^2) dm & \blacksquare & \blacksquare \\ \int_{M \in S} x y \cdot dm & \blacksquare & \blacksquare \\ \int_{M \in S} x z \cdot dm & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

De même :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{(Q, S, \vec{j})} &= \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\vec{j} \wedge \overrightarrow{QM}) \cdot dm = \int_{M \in S} [ \overrightarrow{QM}^2 \cdot \vec{j} - (\overrightarrow{QM} \wedge \vec{j}) \cdot \overrightarrow{QM} ] \cdot dm \\ &= \int_{M \in S} [ (x^2 + y^2 + z^2) \vec{j} - y \cdot (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) ] \cdot dm \end{aligned}$$

Donc :  $\vec{J}_{(Q, S, \vec{j})} = - \left[ \int_{M \in S} x y \cdot dm \right] \vec{i} + \left[ \int_{M \in S} (x^2 + z^2) dm \right] \vec{j} - \left[ \int_{M \in S} y z \cdot dm \right] \vec{k}$

Et :  $\vec{J}_{(Q, S, \vec{k})} = - \left[ \int_{M \in S} x z \cdot dm \right] \vec{i} - \left[ \int_{M \in S} y z \cdot dm \right] \vec{j} + \left[ \int_{M \in S} (x^2 + y^2) dm \right] \vec{k}$

On obtient finalement :

$$\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm & - \int_S x y \cdot dm & - \int_S x z \cdot dm \\ - \int_S x y \cdot dm & \int_S (x^2 + z^2) \cdot dm & - \int_S y z \cdot dm \\ - \int_S x z \cdot dm & - \int_S y z \cdot dm & \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Cette matrice est habituellement notée :

$$\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

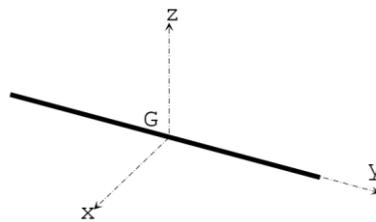
• Définitions :

- ✚ A, B et C sont les **moments d'inertie** de S autour des axes  $(Q, \vec{i})$ ,  $(Q, \vec{j})$  et  $(Q, \vec{k})$  respectivement (en Kg.m<sup>2</sup>) ;
- ✚ D, E et F sont les **produits d'inertie** (en Kg.m<sup>2</sup>).

• Application :

Soit une tige rectiligne (T) de longueur L, de dimensions transversales négligeables, homogène, de masse m et de centre d'inertie G.  $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est un repère orthonormé direct, dont l'axe  $(G, \vec{y})$  est confondu avec l'axe de la tige (T).

Déterminer la matrice d'inertie de (T) au point G et relativement à la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .



Résultat :  $\bar{I}_{(G, T)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  avec :  $A = \frac{m L^2}{12}$

### 3-3. Base principale d'inertie et Moments principaux d'inertie

La matrice d'inertie est symétrique, elle est alors diagonalisable.

C'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée directe  $(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  telle que :

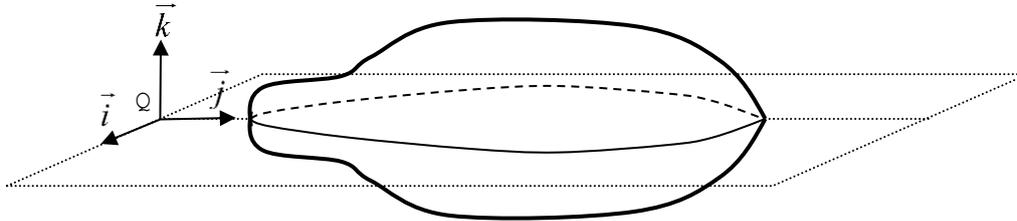
$$\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & C_p \end{bmatrix}_{(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)}$$

- ✚  $A_p, B_p$  et  $C_p$  sont appelés : moments **principaux** d'inertie ;
- ✚ Les axes  $(Q, \vec{x}_p)$ ,  $(Q, \vec{y}_p)$  et  $(Q, \vec{z}_p)$  sont appelés : axes **principaux** d'inertie.
- ✚ La base  $(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  est appelée : base **principale** d'inertie.

### 3-4. Effet de la symétrie matérielle d'un solide sur la forme de sa matrice d'inertie

**1<sup>er</sup> cas** : S possède un plan de symétrie matérielle

$(Q, \vec{i}, \vec{j})$  plan de symétrie matérielle de S.

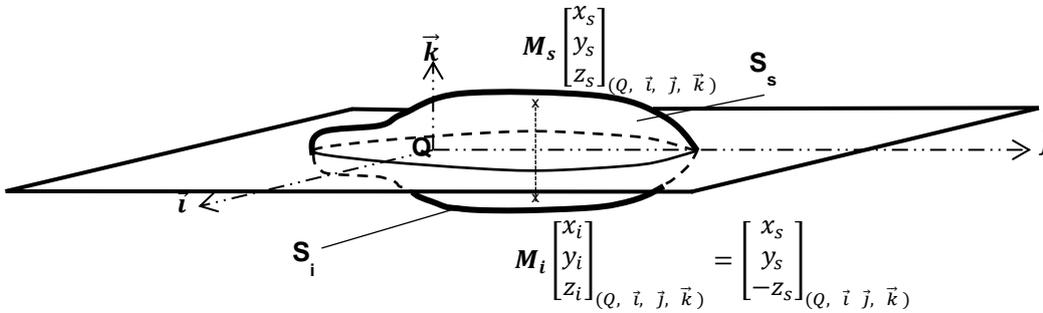


On alors :

$$\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

- Démonstration :

Le plan  $(Q, \vec{i}, \vec{j})$  est plan de symétrie matérielle du solide S. On peut écrire :  $S = S_s \cup S_i$  , avec  $S_s = S_i$



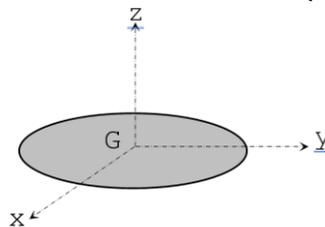
$$\blacksquare D = \int_S y z \cdot dm = \int_{S_s} y_s z_s \cdot dm + \int_{S_i} y_i z_i \cdot dm = \int_{S_s} y_s z_s \cdot dm - \int_{S_s} y_s z_s \cdot dm = 0$$

$$\blacksquare E = \int_S x z \cdot dm = 0$$

$$\text{Donc : } \bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

- Conclusion : si S possède un plan de symétrie matérielle alors l'axe  $\perp$  à ce plan est axe **principal d'inertie**.
- Remarque : Si S possède deux plans de symétrie matérielle perpendiculaires, alors sa matrice d'inertie est **diagonale**.
- Application :

Soit un disque (D) du plan  $(G, \vec{x}, \vec{y})$  de centre d'inertie G, de rayon R, d'épaisseur négligeable devant son rayon et de masse m. Déterminer la matrice d'inertie de (D) au point G et relativement à la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

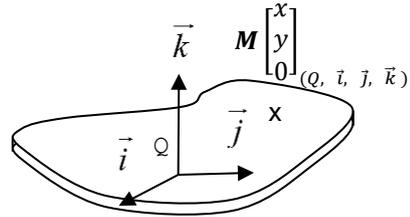


Résultat :  $\bar{I}_{(G,D)} = \begin{bmatrix} C/2 & 0 & 0 \\ 0 & C/2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$  avec :  $C = \frac{mR^2}{2}$

**2ème cas : S est une plaque plane**

On alors :

$$\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})}$$



- Démonstration :

Le solide S est contenu dans le plan  $(Q, \vec{i}, \vec{j})$ , donc :

■  $A = \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm = \int_S y^2 \cdot dm$       ■  $B = \int_S (x^2 + z^2) \cdot dm = \int_S x^2 \cdot dm$

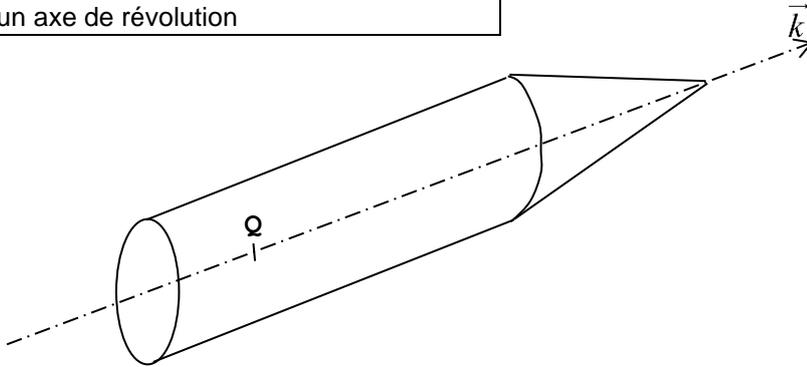
■  $A + B = \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm = C$

■  $E = \int_S x z \cdot dm = 0$       ■  $D = \int_S y z \cdot dm = 0$

Donc :  $\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})}$

- Conclusion : si S est une plaque plane alors l'axe  $\perp$  à son plan est axe **principal d'inertie**, et le moment d'inertie par rapport à cet axe est la **somme** des deux autres moments d'inertie.

**3ème cas : S possède un axe de révolution**



On a alors :  $\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \bar{k})}$

- Démonstration :

Les plans  $(Q, \vec{i}, \vec{k})$  et  $(Q, \vec{j}, \vec{k})$  sont plans de symétrie matérielle du solide S, Donc :  $\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})}$

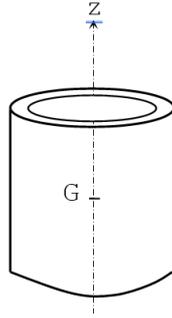
Les axes  $(Q, \vec{i})$  et  $(Q, \vec{j})$  jouent le même rôle pour S, Donc :  $\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})}$

Tous les axes passant par Q jouent le même rôle pour S, Donc :  $\bar{I}_{(Q, S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \bar{k})}$

### 3-5. Application :

Soit un cylindre creux (C), de rayon extérieur R et de rayon intérieur r, de hauteur h, homogène et de masse m, de centre d'inertie G, et d'axe de révolution matérielle (G,  $\vec{z}$ ).

Déterminer la matrice d'inertie de (C) au point G et relativement à la base ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ).



Résultat :  $\bar{I}_{(G,C)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  avec :  $A = m \left( \frac{R^2+r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$  ;  $C = m \frac{R^2+r^2}{2}$

### 3-6. Matrice d'inertie des solides usuels :

Voir Annexe 2

### 3-7. Matrice d'inertie d'un ensemble de solides

Soit  $D = \bigcup_1^n S_i$ , on a alors :  $\bar{I}_{(Q, D)} = \sum_1^n \bar{I}_{(Q, S_i)}$

### 3-8. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

On considère un solide S et Q point quelconque :

$\Delta$  est une droite passant par Q et de directeur  $\vec{\delta}$ .

Le moment d'inertie de S par rapport à  $\Delta$  est :

$$J_{(S/\Delta)} = \vec{\delta}^t \cdot [\bar{I}_{(Q, S)} \cdot \vec{\delta}]$$

- Démonstration :

$$J_{S/\Delta} = \int_{M \in S} \overline{MH}^2 \cdot dm$$

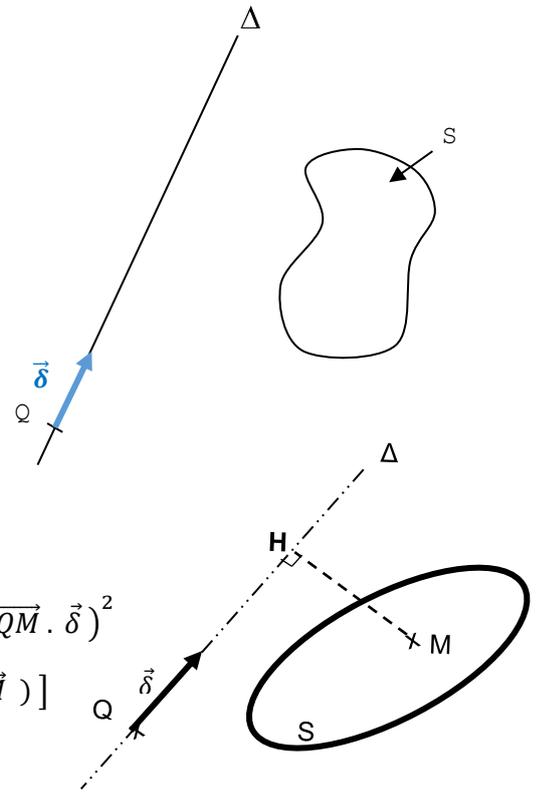
On a :  $\overline{MH}^2 = \overline{QM}^2 - \overline{QH}^2 = \overline{QM}^2 - (\overline{QM} \cdot \vec{\delta})^2 = \overline{QM}^2 \cdot \vec{\delta}^2 - (\overline{QM} \cdot \vec{\delta})^2$   
 $= \vec{\delta} \cdot [\overline{QM}^2 \vec{\delta} - (\overline{QM} \cdot \vec{\delta}) \overline{QM}] = \vec{\delta} \cdot [\overline{QM} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overline{QM})]$

On injecte cette expression dans la relation précédente :

$$J_{S/\Delta} = \int_{M \in S} \overline{MH}^2 \cdot dm = \int_{M \in S} \vec{\delta} \cdot [\overline{QM} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overline{QM})] \cdot dm = \vec{\delta} \cdot \int_{M \in S} [\overline{QM} \wedge (\vec{\delta} \wedge \overline{QM})] \cdot dm$$

$$J_{S/\Delta} = \vec{\delta} \cdot \vec{J}_{(Q, S, \vec{u})}$$

D'où l'on tire :  $J_{S/\Delta} = \vec{\delta} \cdot [\bar{I}_{(Q, S)} \cdot \vec{\delta}]$



### 3-9. Théorème de HUYGENS

S : solide de centre de gravité G.

Q : point quelconque.

Le théorème de HUYGENS s'écrit :  $\bar{I}_{(Q, S)} = \bar{I}_{(G, S)} + \bar{I}_{(Q, m_S, G)}$

Matrice d'inertie, au point Q, de la masse de S localisée en G

• Démonstration :

Pour un vecteur  $\vec{u}$  quelconque :  $\vec{J}_{(Q, S, \vec{u})} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM}) \cdot dm$

Avec :  $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GM}$ , on aura :  $\vec{J}_{(Q, S, \vec{u})} = \int_{M \in S} (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GM}) \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM}) \cdot dm$

$$\vec{J}_{(Q, S, \vec{u})} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM}) \cdot dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM}) \cdot dm$$

$$\vec{J}_{(Q, S, \vec{u})} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM}) \cdot dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG}) \cdot dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}) \cdot dm$$

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QM}) \cdot dm = \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \cdot dm) = m \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG}) = \vec{J}_{(Q, \{G, m\}, \vec{u})}$$

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG}) \cdot dm = (\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm) \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG}) = \vec{0}$$

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}) \cdot dm = \vec{J}_{(G, S, \vec{u})}$$

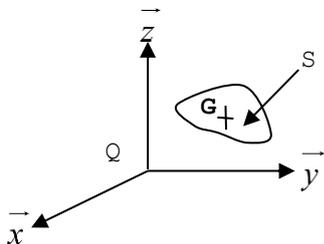
Donc :  $\vec{J}_{(Q, S, \vec{u})} = \vec{J}_{(G, S, \vec{u})} + \vec{J}_{(Q, \{G, m\}, \vec{u})}$

Soit alors :  $\bar{I}_{(Q, S)} \cdot \vec{u} = \bar{I}_{(G, S)} \cdot \vec{u} + \bar{I}_{(Q, \{G, m\})} \cdot \vec{u}$

On en déduit finalement que :  $\bar{I}_{(Q, S)} = \bar{I}_{(G, S)} + \bar{I}_{(Q, \{G, m\})}$

• Remarque :

Soit  $\overrightarrow{QG} = X_G \vec{x} + Y_G \vec{y} + Z_G \vec{z}$ , alors :



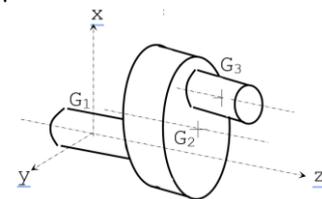
$$\bar{I}_{(Q, m_S, G)} = M_S \begin{bmatrix} Y_G^2 + Z_G^2 & -X_G Y_G & -X_G Z_G \\ -X_G Y_G & X_G^2 + Z_G^2 & -Y_G Z_G \\ -X_G Z_G & -Y_G Z_G & X_G^2 + Y_G^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

• Application :

Soit un vilebrequin (V) modélisé par trois cylindres  $C_i$ , chacun centre de gravité  $G_i$ , de masse  $m_i$  et d'axe de révolution matérielle  $(G_i, \vec{z})$ .

On donne :  $\overrightarrow{G_1 G_2} = a_2 \vec{x} + c_2 \vec{z}$  et  $\overrightarrow{G_1 G_3} = a_3 \vec{x} + c_3 \vec{z}$

Déterminer la matrice d'inertie de (V) au point  $G_1$  et relativement à la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .



$$\text{Résultat : } \bar{I}_{(G_1, V)} = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

avec :  $A = \sum_1^3 A_i + \sum_2^3 m_i \cdot c_i^2$  ;  $B = \sum_1^3 A_i + \sum_2^3 m_i \cdot (a_i^2 + c_i^2)$  ;  $C = \sum_1^3 C_i + \sum_2^3 m_i \cdot a_i^2$  et  $E = \sum_2^3 m_i \cdot a_i \cdot c_i$

$A_i$  et  $C_i$  sont les éléments de la matrice d'inertie du cylindre  $C_i$  au point  $G_i$  et relativement à la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

## 4. Torseur cinétique

### 4-1. Définition

Le torseur cinétique du système matériel D, dans son mouvement par rapport à un repère R, en un point Q quelconque est :

$$\{C_{(D/R)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{c(D/R)} \\ \vec{\sigma}_{Q(D/R)} \end{array} \right\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in D} \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm \\ \int_{M \in D} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M/R)} \cdot dm \end{array} \right\}_Q$$

- Sa résultante est appelée : résultante Cinétique de D dans son mouvement par rapport à R (ou quantité de mouvement) (en Kg.m.S<sup>-1</sup>) ;
- Son moment est appelé : moment cinétique au point Q de D dans son mouvement par rapport à R (en Kg.m<sup>2</sup>.S<sup>-1</sup>).

### 4-2. Expressions pratiques

- Résultante cinétique :

Pour un système matériel D :  $\vec{R}_{c(D/R)} = m_D \cdot \vec{V}_{(G/R)}$

Démonstration :

Nous avons déjà montré que :  $\int_{M \in D} \vec{V}_{(M, D/R)} \cdot dm = m_D \cdot \vec{V}_{(G/R)}$

Donc :  $\vec{R}_{c(D/R)} = \int_{M \in D} \vec{V}_{(M, D/R)} \cdot dm = m_D \cdot \vec{V}_{(G/R)}$

- Moment cinétique :

Pour un solide S :  $\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \vec{I}_{(Q,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)} + m \cdot \overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{(Q, S/R)}$

Démonstration :

On a :  $\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M, S/R)} dm$

Pour le point Q lié au solide S, on peut écrire :  $\vec{V}_{(M, S/R)} = \vec{V}_{(Q, S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}$

Donc :  $\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\vec{V}_{(Q, S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}) dm$

$$\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \int_{M \in S} (\overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(Q, S/R)}) dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}) dm$$

$$\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \int_{M \in S} (\overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(Q, S/R)}) dm + \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} \wedge (\vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{QM}) dm$$

$$\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \left( \int_{M \in S} \overrightarrow{QM} dm \right) \wedge \vec{V}_{(Q, S/R)} + \vec{J}_{(Q, S, \vec{\Omega}_{(S/R)})}$$

$$\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = m \overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{(Q, S/R)} + \vec{I}_{(Q,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)}$$

D'où il vient :  $\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \vec{I}_{(Q,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)} + m \cdot \overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{(Q, S/R)}$

Cas particuliers :

Voir Annexe 3

### 4-3. Torseur cinétique d'un ensemble de solides

Soit  $D = \bigcup_1^n S_i$  :  $\{C_{(D/R)}\} = \sum_1^n \{C_{(S_i/R)}\}$

- Résultante cinétique :  $\vec{R}_{c(D/R)} = \sum_1^n \vec{R}_{c(Si/R)} = \sum_1^n m_i \cdot \vec{V}_{(Gi/R)}$
- Moment cinétique :  $\vec{\sigma}_{Q(D/R)} = \sum_1^n \vec{\sigma}_{Q(Si/R)} = \sum_1^n [ \vec{I}_{(Q, Si)} \cdot \vec{\Omega}_{(Si/R)} + m_i \cdot \overrightarrow{QG_i} \wedge \vec{V}_{(Q, Si/R)} ]$

## 5. Torseur dynamique

### 5-1. Définition

Le torseur dynamique du système matériel D, dans son mouvement par rapport à un repère R, en un point Q quelconque est :

$$\{ \mathcal{D}_{(D/R)} \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{d(D/R)} \\ \vec{\delta}_{Q(D/R)} \end{array} \right\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M/R)} \cdot d\mathbf{m} \\ \int_{M \in D} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M/R)} \cdot d\mathbf{m} \end{array} \right\}_Q$$

- Sa résultante est appelée : résultante dynamique de D dans son mouvement par rapport à R (en Kg.m.S<sup>-2</sup>);
- Son moment est appelé : moment dynamique au point Q de D dans son mouvement par rapport à R (en Kg.m<sup>2</sup>.S<sup>-2</sup>).

### 5-2. Expressions pratiques

- Résultante dynamique

Pour un système matériel D :  $\vec{R}_{d(D/R)} = m_D \cdot \vec{\Gamma}_{(G/R)}$

Démonstration :

Nous avons déjà montré que :  $\int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M, D/R)} \cdot d\mathbf{m} = m_D \cdot \vec{\Gamma}_{(G/R)}$

Donc :  $\vec{R}_{d(D/R)} = \int_{M \in D} \vec{\Gamma}_{(M, D/R)} \cdot d\mathbf{m} = m_D \cdot \vec{\Gamma}_{(G/R)}$

- Moment dynamique

Pour un système matériel D :  $\vec{\delta}_{Q(D/R)} = \left[ \frac{d\vec{\sigma}_{Q(D/R)}}{dt} \right]_R + m_D \cdot \vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G/R)}$

Démonstration :

On a : 
$$\left[ \frac{d\vec{\sigma}_{Q(D/R)}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d \left( \int_{M \in D} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M, D/R)} d\mathbf{m} \right)}{dt} \right]_R = \int_{M \in D} \left[ \frac{d \left( \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{(M, D/R)} \right)}{dt} \right]_R d\mathbf{m}$$

$$= \int_{M \in D} \left( \left[ \frac{d\overrightarrow{QM}}{dt} \right]_R \wedge \vec{V}_{(M, D/R)} + \overrightarrow{QM} \wedge \left[ \frac{d\vec{V}_{(M, D/R)}}{dt} \right]_R \right) d\mathbf{m}$$

$$\left[ \frac{d\vec{\sigma}_{Q(D/R)}}{dt} \right]_R = \int_{M \in D} \left( \left[ \vec{V}_{(M, D/R)} - \vec{V}_{(Q/R)} \right] \wedge \vec{V}_{(M, D/R)} + \overrightarrow{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M, D/R)} \right) d\mathbf{m}$$

Donc : 
$$\left[ \frac{d\vec{\sigma}_{Q(D/R)}}{dt} \right]_R = \int_{M \in D} \left( -\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(M, D/R)} + \overrightarrow{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M, D/R)} \right) d\mathbf{m}$$

$$= \int_{M \in D} -\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(M, D/R)} d\mathbf{m} + \int_{M \in D} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{(M, D/R)} d\mathbf{m}$$

$$= -\vec{V}_{(Q/R)} \wedge \int_{M \in D} \vec{V}_{(M, D/R)} d\mathbf{m} + \vec{\delta}_{Q(D/R)} = -m_D \cdot \vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G/R)} + \vec{\delta}_{Q(D/R)}$$

D'où il vient :

$$\vec{\delta}_{Q(D/R)} = \left[ \frac{d\vec{\sigma}_{Q(D/R)}}{dt} \right]_R + m_D \cdot \vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G/R)}$$

**5-3. Torseur dynamique d'un ensemble de solides**

Soit  $D = \bigcup_1^n S_i$  :  $\{\mathcal{D}_{(D/R)}\} = \sum_1^n \{\mathcal{D}_{(S_i/R)}\}$

- Résultante dynamique :  $\vec{R}_{d(D/R)} = \sum_1^n \vec{R}_{d(S_i/R)} = \sum_1^n m_i \cdot \vec{\Gamma}_{(G_i/R)}$
- Moment dynamique :  $\vec{\delta}_{Q(D/R)} = \sum_1^n \vec{\delta}_{Q(S_i/R)} = \sum_1^n ( \left[ \frac{d\vec{\sigma}_{Q(S_i/R)}}{dt} \right]_R + m_i \cdot \vec{V}_{(Q/R)} \wedge \vec{V}_{(G_i/R)} )$

**5-4. Application**

(Adapté du CMP)

L'appareil étudié est conçu pour contrôler les états des surfaces des pièces.

Son schéma est donné ci-contre, et on y distingue :

- ✓ Une unité de Translation animée par le moteur UT ;
- ✓ Une unité de Rotation animée par le moteur UR.

Le schéma cinématique de l'appareil et les figures planes des rotations sont fournies.

Données :

- **Solide 0** : repère lié  $R_0 (0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  galiléen ;
- **Solide 1** : repère lié  $R_1 (0, \vec{X}_0, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$ , de centre d'inertie  $G_1$  situé sur  $(0, \vec{X}_0)$ .  
 $J_1$  est son moment d'inertie autour de  $(0, \vec{X}_0)$  ;
- **Solide 2** : repère lié  $R_2 (P, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ , de masse  $m_2$  et  $\vec{OP} = x \vec{X}_0$  ;  $\vec{G}_2P = L \vec{X}_0$  ;
- **Solide 3** : repère lié  $R_3 (P, \vec{X}_3, \vec{Y}_0, \vec{Z}_3)$ , de masse  $m_3$  et  $\vec{PG}_3 = r \vec{X}_3$ .  $\bar{I}_{(G_3, 3)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_3}$

Déterminons le moment cinétique au point P de 3, dans son mouvement par rapport à 0.

Déterminer le torseur cinétique au point P de 2, dans son mouvement par rapport à 0.

Déterminons le torseur dynamique au point P de 2 dans son mouvement par rapport à 0.

Résultat :  $\vec{\sigma}_{P(3/R_0)} = -\dot{\theta} (F \vec{X}_3 + D \vec{Z}_3) + [m_3 \cdot r (-\dot{x} \sin \theta + r \dot{\theta}) + B \dot{\theta}] \vec{Y}_0$   
 $\{\mathcal{C}_{(2/R_0)}\} = \begin{Bmatrix} m_2 \cdot \dot{x} \vec{X}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$  ;  $\{\mathcal{D}_{(2/R)}\} = \begin{Bmatrix} m_2 \cdot \ddot{x} \vec{X}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$

**6. Energie cinétique :**

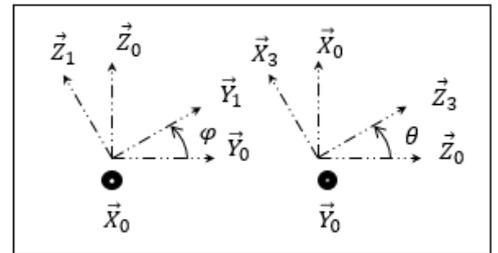
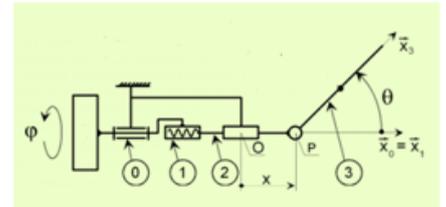
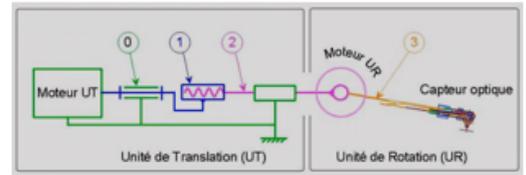
**6-1. Définition**

L'énergie cinétique d'un système matériel D dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$T_{(D/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in D} \vec{V}_{(M/R)}^2 \cdot dm$$

**6-2. Expression pratique**

Pour un solide S :  $T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}_{(S/R)}\} \otimes \{\mathcal{C}_{(S/R)}\}$



Démonstration :

On a :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int \vec{v}_{(M, D/R)}^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \int \vec{v}_{(M, S/R)} \cdot \vec{v}_{(M, S/R)} dm$$

On sait que :

$$\vec{v}_{(M, S/R)} = \vec{v}_{(Q, S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}$$

donc :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in S} \vec{v}_{(M, S/R)} \cdot [\vec{v}_{(Q, S/R)} + \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)}] dm$$

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \int_{M \in S} [\vec{v}_{(M, S/R)} \cdot \vec{v}_{(Q, S/R)} + \vec{v}_{(M, S/R)} \cdot (\overrightarrow{MQ} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R)})] dm$$

Ce qui se traduit par :

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \left[ m \vec{v}_{(G, S/R)} \cdot \vec{v}_{(Q, S/R)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \int_{M \in S} \vec{v}_{(M, S/R)} \wedge \overrightarrow{MQ} dm \right]$$

$$T_{(S/R)} = \frac{1}{2} [ m \vec{v}_{(G, S/R)} \cdot \vec{v}_{(Q, S/R)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \vec{\sigma}_Q(S/R) ]$$

$$\text{D'où : } T_{(S/R)} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}_{(S/R)} \} \cdot \{ \mathcal{C}_{(S/R)} \}$$

Cas particuliers :

Voir Annexe 3

**6-3. Pour un ensemble de solides**

$$\text{Soit } D = \bigcup_1^n S_i : \quad T_{(D/R)} = \sum_1^n T_{(S_i/R)} = \sum_1^n \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}_{(S_i/R)} \} \otimes \{ \mathcal{C}_{(S_i/R)} \}$$

**6-4. Inertie équivalente**

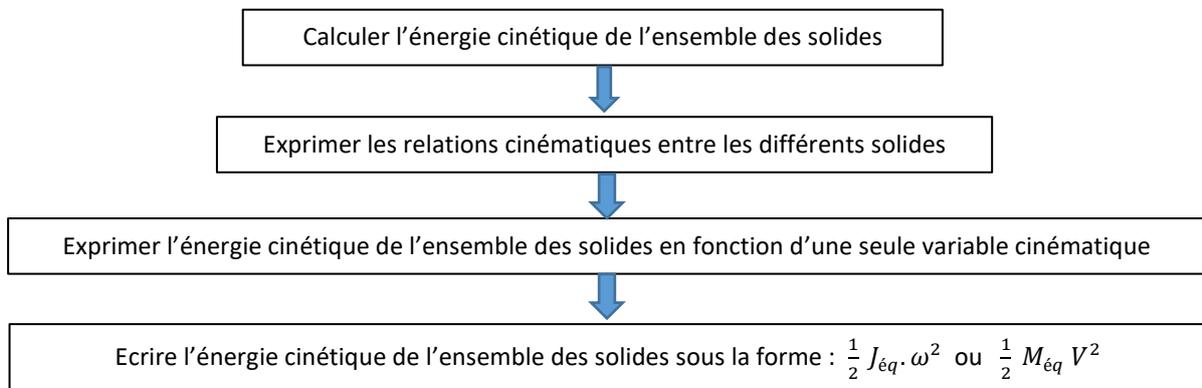
• Intérêt

L'intérêt d'exprimer une " inertie équivalente " est de quantifier l'inertie " ressentie " par un moteur entrainant une chaine d'énergie.

• Utilité

L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces.

• Méthode de détermination de l'inertie équivalente



• Application

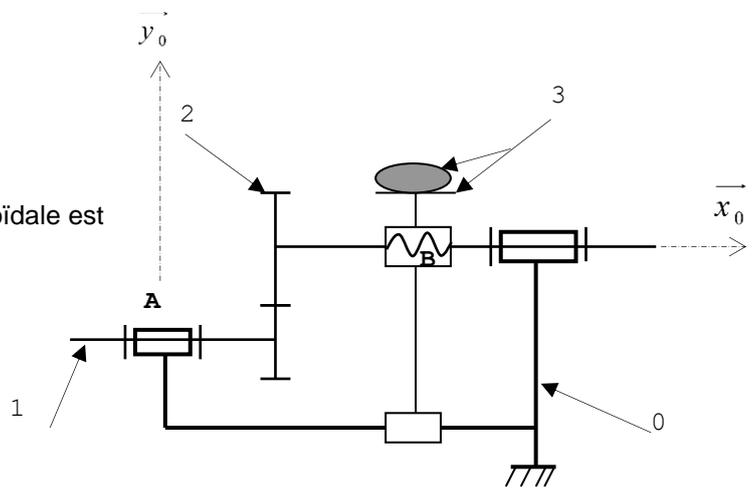
Le système à étudier est une table de machine permettant de déplacer des charges. Elle est constituée de :

- **Bâti 0** : auquel est lié le repère galiléen  $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .  $\vec{g} = -g \vec{y}_0$  ;
- **Arbre moteur 1** :  $I_1$  moment d'inertie de 1 par rapport à son axe de rotation et  $Z_1$  nombre de dents de la roue dentée liée à 1 ;

- **Vis 2** :  $I_2$  moment d'inertie de 2 par rapport à son axe de rotation, et  $Z_2$  nombre de dents de la roue dentée liée à 2 ;
- **Table et charge 3** : de masse  $M$ . La liaison hélicoïdale est de pas  $p$  à droite.

Déterminer le moment d'inertie équivalente ramené sur 1, puis sur 2.

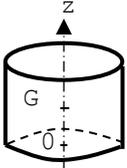
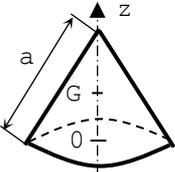
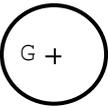
Déterminer la masse équivalente ramenée sur 3.



**Résultat** :  $I_{\acute{e}q1} = I_1 + \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 I_2 + M_3 \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$  ;  $I_{\acute{e}q2} = I_1 \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 + I_2 + M_3 \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2$  ;

$$M_{\acute{e}q3} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \left[ \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 I_1 + I_2 \right] + M_3$$

## Annexe 1 – Surfaces et volumes usuels

Forme du solide	Centre de gravité	Surface latérale	Volume
Cylindre 	h: hauteur R: Rayon  $OG = h/2$	$2\pi Rh$	$\pi R^2 h$
Cône 	h: hauteur R: Rayon de la base  $OG = h/4$	$\pi Ra$	$\pi R^2 h/3$
Sphère 	R: Rayon G: centre de la sphère	$4\pi R^2$	$4\pi R^3/3$
Disque 	R: Rayon G: centre du disque	$\pi R^2$	
Cercle 	R: Rayon G: centre du cercle	Longueur $2\pi R$	

## Annexe 2 – Matrices d'inertie des solides usuels

**Cylindre creux**

$\vec{z}$

$R_e$   $R_i$

$G$

$h$

$$\bar{I}_{(G, \text{cylindre creux})} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$$

$$A = m \left( \frac{R_e^2 + R_i^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

$$C = m \frac{R_e^2 + R_i^2}{2}$$

$m$  : masse ;  
 $G$  : centre de gravité.

$R_i = 0$

**Cylindre plein**

$\vec{z}$

$R_e$

$G$

$h$

$R_i = R_e$

**Surface cylindrique**

$\vec{z}$

$R_e$

$G$

$h$

$h = R_i = 0$

**Disque plein**

$\vec{z}$

$R_e$   $G$

$h = 0$

**Disque creux**

$\vec{z}$

$G$

$R_e$   $R_i$

$h = 0$  et  $R_i = R_e$

**Cerceau circulaire**

$\vec{z}$

$R_e$   $G$

$R_i = R_e = 0$

**Tige rectiligne**

$\vec{z}$

$G$   $h$

**Parallélépipède rectangle**

$\vec{z}$

$\vec{y}$

$\vec{x}$

$c$

$a$

$b$

$G$

$$\bar{I}_{(G, \text{Paral. Rect.})} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$m$  : masse ;  $G$  : centre de gravité

$a = b = c$

**Cube**

$a$

$c = 0$

**Surface rectangulaire**

$\vec{z}$

$\vec{y}$

$\vec{x}$

$a$

$b$

$G$

$b = c = 0$

**Tige rectiligne**

$\vec{z}$

$\vec{y}$

$\vec{x}$

$a$

$G$

## Annexe 3 – Cas particuliers

### ➤ Liés à la nature du point Q

#### ✓ Au centre d'inertie G de S (ou D) :

- Moment cinétique :  $\vec{\sigma}_{G(S/R)} = \bar{I}_{(G,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)}$
- Moment dynamique :  $\vec{\delta}_{G(D/R)} = \left[ \frac{d\vec{\sigma}_{G(D/R)}}{dt} \right]_R$

- ✓ R : repère ;
- ✓ S : solide ;
- ✓ D : système matériel ;
- ✓ G : centre de gravité ;
- ✓ M : masse.

#### ✓ En un point Q fixe dans le repère R :

- Moment cinétique :  $\vec{\sigma}_{Q(S/R)} = \bar{I}_{(Q,S)} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)}$
- Moment dynamique :  $\vec{\delta}_{Q(D/R)} = \left[ \frac{d\vec{\sigma}_{Q(D/R)}}{dt} \right]_R$

### ➤ Liés à la nature du mouvement du solide S par rapport à R

#### ✓ solide en translation par rapport à R :

- Moment cinétique :  $\vec{\sigma}_{G(S/R)} = \vec{0}$
- Moment dynamique :  $\vec{\delta}_{G(S/R)} = \vec{0}$
- Energie cinétique :  $T_{(S/R)} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{(\forall \text{ point } ,S/R)}^2$

#### ✓ solide en rotation autour d'un axe $(A, \vec{u})$ , fixe dans le repère R :

- Moment cinétique :  $\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{A(S/R)} = J \cdot \dot{\theta}$
- Moment dynamique :  $\vec{u} \cdot \vec{\delta}_{A(S/R)} = J \cdot \ddot{\theta}$
- Energie cinétique :  $T_{(S/R)} = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}^2$

- ✓ J : moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe  $(A, \vec{u})$  ;
- ✓  $\theta$  : paramètre de rotation du solide S autour de l'axe  $(A, \vec{u})$ .

#### ✓ solide en mouvement plan, dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y})$ , de R :

- Energie cinétique :  $T_{(S/R)} = \frac{1}{2} [m \vec{V}_{(G,S/R)}^2 + J_z \dot{\theta}^2]$

- ✓  $J_z$  : moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$  ;
- ✓  $\theta$  : paramètre de rotation du solide S autour de l'axe  $(A, \vec{z})$ .

### ➤ Liés à la nature du solide S

#### ✓ Pour un solide $S_p$ assimilé à une masse m ponctuelle en A :

- Moment cinétique :  $\vec{\sigma}_{A(S_p/R)} = \vec{0}$
- Moment dynamique :  $\vec{\delta}_{A(S_p/R)} = \vec{0}$
- Energie cinétique :  $T_{(S_p/R)} = \frac{1}{2} m \vec{V}_{(A/R)}^2$